

Разработка урока для дистанционного обучения.

Основные понятия комбинаторики

Цели урока:

- способствовать развитию логического мышления, пространственного воображения.
- способствовать самостоятельному определению целей деятельности и составлению плана деятельности, оцениванию учебных действий в соответствии с поставленной задачей и условиями ее выполнения.
- изучит основные понятия комбинаторики;
- отработка навыков решения комбинаторных задач с использованием формул перестановок, размещений, сочетаний.

Задачи урока:

- организовывать собственную деятельность, исходя из цели и способов ее достижения;
- анализировать рабочую ситуацию, осуществлять текущий и итоговый контроль, оценку и коррекцию собственной деятельности, нести ответственность за результаты своей работы;
- работать самостоятельно.

Ход урока.

Теоретическая часть:

Интересные факты (прочитать).

Комбинаторика – ветвь математики, изучающая комбинации и перестановки предметов, - возникла в XII веке.

Еще в доисторическую эпоху люди сталкивались с комбинаторными задачами. Выбирать и расположить предметы в определенном порядке, отыскивать среди разных расположений наилучшее – вот задачи, решаемые в быту, на охоте или в сражениях. Некоторые элементы комбинаторики были известны в Индии еще во II в. до н. э. Нидийцы умели вычислять числа, которые сейчас называют "сочетания". В XII в. Бхаскара вычислял некоторые виды сочетаний и перестановок. Предполагают, что индийские ученые изучали соединения в связи с применением их в поэтике, науке о структуре стиха и поэтических произведениях. Например, в связи с подсчетом возможных сочетаний ударных (долгих) и безударных (кратких) слогов стопы из n слогов. По мере усложнения производственных и общественных отношений задачи усложнялись. Комбинаторные задачи встречались, как игры в досуге. Наряду с состязаниями в беге, метании диска, кулачными боями появлялись игры, требовавшие умение мыслить, рассчитывать, составлять планы, опровергать планы противника. Со временем игры усложнились: появились нарды, карты, шашки и шахматы. В таких играх приходилось рассчитывать различные ситуации, комбинации сочетания фигур.

При тайных переписках дипломаты стали применять шифры, которые были основаны на различных перестановках букв, чисел, заменах букв с использованием ключевых слов и т. д.

Комбинаторика как наука стала развиваться в XIII в. параллельно с возникновением теории вероятностей. Первые научные исследования по этой теме принадлежат итальянским ученым Дж. Кардано, Н. Чарталье (1499-1557), Г. Галилею (1564-1642) и французским ученым Б.Пискамо (1623-1662) и П. Ферма. Комбинаторику, как самостоятельный раздел математики первым стал рассматривать немецкий ученый Г. Лейбниц в своей работе «Об искусстве комбинаторики», опубликованной в 1666г. Он также впервые ввел термин «Комбинаторика». Значительный вклад в

развитие комбинаторики внес Л. Эйлер. Современная символика сочетаний была предложена разными авторами учебных руководств только в XIX в.

За последние годы комбинаторика переживает период бурного развития, связанного с общим повышением интереса к проблемам дискретной математики. Комбинаторные методы используются для решения транспортных задач, в частности задач по составлению расписаний; для составления планов производства и реализации продукции. Установлены связи между комбинаторикой и задачами линейного программирования, статистики и т. д. Комбинаторика используется для составления и декодирования шифров и для решения других проблем теории информации. Значительную роль комбинаторные методы играют и в чисто математических вопросах — теории групп и их

представлений, изучении оснований геометрии, неассоциативных алгебр и т. д.

Математика на шахматной доске и в играх.

Профессиональный интерес математиков к шахматам проявился довольно давно и был связан с двумя направлениями: математической логикой и комбинаторикой. Первое — рассмотрение игры с точки зрения построения ее формальной модели, удобной для логического анализа на основе действующих соревновательных правил. Второе — исследование конкретных позиций или их классов в игре для достижения определенных результатов, например матовой позиции за определенное число ходов. Последнее направление породило множество изящных логико-вычислительных проблем. Некоторые из них и по сей день предлагаются на различных математических и программистских олимпиадах, а также для развлечения на досуге.

Клод Шеннон и Михаил Ботвинник внесли огромный вклад в создание математической модели шахматной игры и способствовали прогрессу в интеллектуализации программ для нее.

По существу компьютерные шахматы — едва ли не самый убедительный пример за полвека развития информационных технологий, когда именно в интеллектуальной деятельности автомат успешно соперничает с человеком.

Необыкновенно популярна головоломка - кубик Рубика, изобретенный в 1975 г. преподавателем архитектуры из Будапешта Эрне Рубиком для развития пространственного воображения у студентов. Задача поиска оптимального (по числу ходов) алгоритма сбора кубика Рубика является самой сложной и не решенной пока математической задачей. Представляет интерес также изучение группы, порожденной поворотами граней, и др. Кубик Рубика служит не только развлечением, но и прекрасным наглядным пособием по алгебре, комбинаторике, программированию.

Пароли и коды в нашей жизни.

Вся наша жизнь состоит из множества разнообразных программ. Чтобы запустить ту или иную программу нужно ввести соответствующий верный пароль.

В качестве кода в зависимости от рода программы могут выступать всевозможные цифры, слова или комбинации слов, поведение или действие, и так далее...

Когда мы узнаем что-то новое, развиваемся, к нам приходит жизненный опыт, он то, как раз и есть нечто иное, как набор всевозможных паролей, комбинаций. Ведь опытный человек всегда найдет лучшее решение в конкретной ситуации, потому — что он располагает большей комбинацией паролей.

Мебельная комбинаторика.

Мебельная комбинаторика позволяет рассматривать различные варианты комплектации предметов мебели и выбирать из них наилучшее, комфортнее и практичнее.

Изучение нового материала

Теоретическая часть:

- **Комбинаторика** - это раздел математики, в котором изучаются вопросы о том, сколько различных комбинаций, подчиненных тем или иным условиям, можно составить из заданных объектов.

- Задачи, в которых идёт речь о тех или иных комбинациях объектов, называются **КОМБИНАТОРНЫМИ**

1.Правило произведения.

*Если существует n вариантов выбора первого элемента и для каждого из них имеется m вариантов выбора второго элемента, то всего существует $n*m$ различных пар с выбранными таким образом первым и вторым элементами.*

При решении задач вы должны помнить: важно – количество элементов, а не их численный эквивалент (исключение составляет число «0», если вы составляете число, то «0» не может стоять на первой позиции).

Пример.

1) Сколько двузначных чисел можно составить, используя цифры 5, 7, 4, если известно, что цифры не повторяются (повторяются)?

Решение: первую цифру числа мы выбираем любую из трех цифр (3), вторую цифру числа мы будем выбирать уже из двух, так как одну цифру мы с вами уже использовали (2). Получается $3*2 = 6$.

Ответ: можно составить 6 чисел. (объяснение 57, 54, 75, 74, 45, 47)

2) Сколько двузначных чисел можно составить из цифр 5, 7 и 0?

Решение: первую цифру числа выбираем из двух цифр, т.к. ноль не может быть первой цифрой в числе. (2). Вторую цифру числа выбираем тоже из двух, т.к. одну мы уже использовали (2). Получаем $2*2 = 4$.

Ответ: можно составить 4 числа. (объяснение 50, 57, 70, 75).

3) В группе 15 студентов, необходимо выбрать одного старосту, одного зам.старосты, и культорга. Один и тот же студент не может занимать две должности. Определить, сколькими способами это можно сделать.

Решение: 15 (старосту выбираем из всего количества студентов)

14 (зама выбираем из оставшегося числа студентов)

13 (количество студентов для выбора культорга)

Получаем $15*14*13 = 2730$ способов выбора актива группы.

Ответ: 2730 способов.

2. Правило перестановки.

Перестановками из n элементов называются соединения, которые состоят из одних и тех же n элементов и отличаются только порядком их расположения.

Число перестановок обозначается P_n (читается «пэ эн»). «п» обозначает число элементов.

$$P_n = n*(n-1)*(n-2)*(n-3)*.....3*2*1$$

Обратная последовательность данной формулы

$P_n = 1*2*3 *..... *(n-3)* (n-2)*(n-1)* n$ – произведение первых n натуральных чисел обозначают $n!$ (**эн факториал**). Факториал используется, в том случае если необходимо посчитать большое число (больше 10).

Правило: $1! = 1$; $0! = 1$

Пример $P_{12} = 12!$

$$P_6 = 6! = 1*2*3*4*5*6 = 720$$

Факториал можно записать как произведение нескольких чисел:

$$12! = 11!*12$$

$$12! = 10!*11*12$$

$$12! = 9!*10*11*12$$

$$12! = 8!*9*10*11*12$$

$$12! = 7!*8*9*10*11*12$$

$$12! = 6!*7*8*9*10*11*12 \text{ и т.д.}$$

Внимание!!! При решении примеров сокращать можно только одинаковые факториалы. $10!/9!$ – в этом примере факториалы сократить нельзя, а если $10!$ разложить на множители, тогда получим $(9!*10 / 9! = 10)$ – **9! сократили.**

Примеры вычисления:

$$1) P_3 = 3*2*1 = 6$$

$$2) P_{34} = 34!$$

3)Сколькими способами можно собрать гирлянду из 5 таких лампочек?

$$P_5 = 5*4*3*2*1 = 120.$$

$$4)(9!*5! / 10!) = (9!*5! / 9!*10) = (5! / 10) = (1*2*3*4*5 / 10) = 1*2*3 = 6$$

(цифры отмеченные цветом сокращаем)

Практическая работа № 1.

Учебник «Алгебра 10 – 11 класс» Алимов

№№ 1045(1,3); 1053; 1058(выполняя данный номер, помните- что при составлении чисел «0» не может стоять в начале числа); 1059; 1065

Теоретическая часть:

3.Правило размещения.

Основные формулы комбинаторики

Размещениями называют комбинации, составленные из n различных элементов по m элементов, которые отличаются либо составом элементов либо их порядком. Число всех возможных размещений

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1).$$

Пример. Сколько можно составить сигналов из 6 флажков различного цвета, взятых по 2?

Решение. Искомое число сигналов

$$A_6^2 = 6 * 5 = 30.$$

Часто встречающиеся комбинации:

$A_n^1 = n$; $A_n^2 = n*(n-1)$; $A_n^3 = n*(n-1)*(n-2)$; - эти три формулы чаще всего встречаются в решении примеров.

$A_n^n = P_n = n!$ - частный случай.

Примеры:

$$A_3^1 = 3;$$

$$A_5^2 = 5*(5-1) = 5*4 = 20;$$

$$A_4^3 = 4*(4-1)*(4-2) = 4*3*2 = 24;$$

$$A_5^5 = P_5 = 5! = 1*2*3*4*5 = 120$$

Формула размещения:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Читается: «А из n по m»

Задача

Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 3, 5 и 7, используя в записи числа каждую из них не более одного раза?

$$A_4^3 = \frac{4!}{(4-3)!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1!} = 24$$

Задача

Студенты 1 курса изучают 10 предметов. Сколькими способами можно составить расписание на один день, чтобы в нем было 4 различных предмета?

$$A_{10}^4 = \frac{10!}{(10 - 4)!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!}{6!} = 5040$$

Конспект стр.324 – 325. Дописать из учебника

Записать задачу № 3. Здесь показано решение уравнения с использованием формулы «2 из n». В левую часть вместо «А» подставляем правую часть формулы. Раскрываем скобки и решаем как квадратное уравнение. находим икс первое, второе. Выбираем ответ. Ответ не может быть отрицательным.

Записать задачу формулу №3 и задачу № 4. В ней показано применение формулы № 3 для решения примеров

«А» 7 из 20 – применяя формулу № 3 у вас получается дробь. В числитель уходит 20! (восклицательный знак – знак факториала – ставим обязательно), в знаменатель уходит число полученное в результате разности (20 – 7), т.е. 13!, остальные числа решаем точно так же.

Практическая работа № 2.

Учебник «Алгебра 10 – 11 класс» Алимов

№№ 1072(1,3,5,7); 1076 (1,3); 1077(1,3,5); в пятом примере «А» два из (m+1) расписывается как $= (m+1) \cdot m$