

КОНСПЕКТ
УРОКА ОБОЩЕНИЯ И СИСТЕМАТИЗАЦИИ
ЗНАНИЙ

ПО ТЕМЕ:
«ПРОИЗВОДНАЯ И ЕЁ ПРИМЕНЕНИЕ»

*«...нет ни одной области в математике,
которая когда-либо не окажется применимой
к явлениям действительного мира...»*

Н.И. Лобачевский

Тема урока: Производная и её применение (2 часа)

Цели урока:

Общеобразовательные:

- обобщить и систематизировать знаний по теме «Производная и её применение»;
- углубить понимание сущности производной путём применения её для получения новых знаний;
- установить межпредметные связи.

Развивающие:

- способствовать формированию умений у учащихся применять теоретические знания при решении практических заданий по математике и жизненных задач;
- способствовать развитию у учащихся навыков логических рассуждений;
- способствовать развитию у учащихся умения моделировать, особенно, умения переводить с бытового языка на математический и наоборот, что является необходимым условием развития компетентности в области математики у выпускника;
- способствовать развитию творческой стороны мышления и навыков аналитической работы при выполнении проектной деятельности. Формировать навыки оформления результатов умственного труда.

Воспитательные:

способствовать формированию и развитию:

- навыков критического отношения к проделанной работе;
- чувства ответственности за личную и коллективную деятельность;
- умений и навыков работы в группе;
- познавательного интереса к учебному предмету.

Тип урока: комбинированный .

Оборудование: индивидуальные карточки, карточки с домашним заданием, таблица производных, лист с заданием по группам, компьютер, мультимедиапроектор, компьютерная презентация по теме, творческие работы учеников.

Ход урока.

I. Организационный момент (1 мин.)

II. Постановка цели. Мотивация учебно-познавательной деятельности учащихся (1 мин). Сообщить о контрольной работе.

III. Актуализация прежних знаний (8-10 минут)

Перед опросом четырем ученикам выдаются индивидуальные карточки (приложение 1)

1) Разгадывание кроссворда

1. Французский математик 17 века Пьер Ферма определял эту линию так: «Прямая, наиболее тесно примыкающая к кривой в малой окрестности заданной точки». 2. В математике это понятие возникло в результате попыток придать точный смысл таким понятиям, как «скорость движения в данный момент времени» и «касательной к кривой в заданной точке». 3. Приращение какой переменной обычно обозначают Δx ? 4. Если существует предел в точке a и этот предел равен значению функции в точке a , то в этой точке функцию называют ... 5. Эта точка лежит внутри области определения функции, и в ней функция принимает самое большое значение по сравнению со значением в близких точках. 6. Эта величина определяется как производная скорости по времени. 7. Если функцию $y=f(x)=g(h(x))$, где $y=g(t)$ и $t=h(x)$ - некие функции, то функцию f называют...

Ответы к кроссворду

	П					
	Р					
	О					
К	И				У	
А	З		Н		С	
С	В		Е		К	
А	О		П		О	С
Т	Д	А	Р		Р	Л
Е	Н	Р	Е	М	Е	О
Л	А	Г	Р	А	Н	Ж
Ь	Я	У	Ы	К	И	Н
Н		М	В	С	Е	А
А		Е	Н	И		Я
Я		Н	А	М		
		Т	Я	У		
				М		

2) параллельно устный опрос

- Определение производной.
- Дифференцированность функции в точке.
- Правила дифференцирования.
- Таблица производных.
- Геометрический смысл производной.
- Физический смысл производной.
- Уравнение касательной.

Найдите ошибку:

$f(x)$	$f'(x)$
x^n	$n x^{n+1}$
$\cos x$	$\sin x$
3	9
x	x^2
$\sin x$	$\operatorname{tg} x$
$\operatorname{ctg} x$	$1/\sin^2 x$
$\sqrt{x}$	$1/\sqrt{x}$

Анализ найденных ошибок.

3) Задание: найдите ошибку, если она есть.

$$1) \quad y' = \left((2x^2 + 5)^{10} \right)' = 10 \times (2x^2 + 5)^9 \times 4x;$$

$$2) \quad y' = (\cos^3 x + \sin^3 x)' = -3\cos^2 x \sin x + 3\sin^2 x \cos x;$$

$$3) \quad y' = \left(\frac{x^2}{x-1} \right)' = \frac{2x(x-1) + x^2}{(x-1)^2} = \frac{3x^2 - 2x}{(x-1)^2};$$

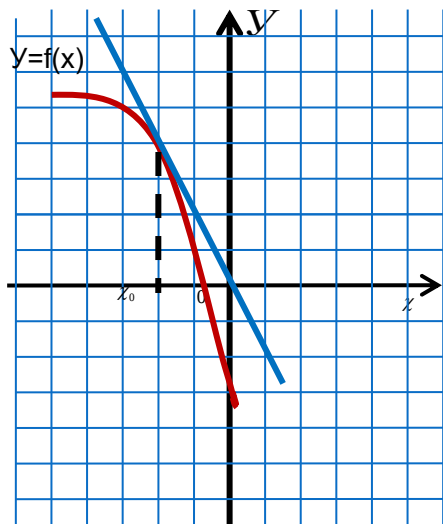
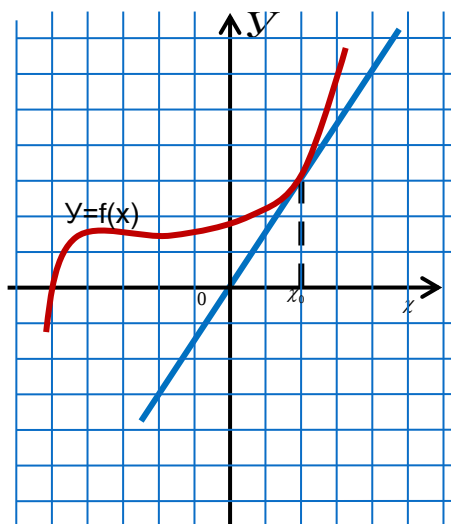
$$4) \quad y' = (\cos^2 \sqrt{2x})' = -2 \cos \sqrt{2x} \sin \sqrt{2x} \times \frac{1}{\sqrt{2x}}.$$

Анализ найденных ошибок.

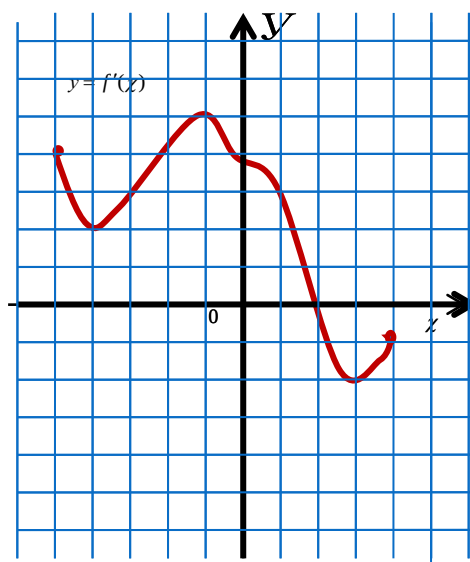
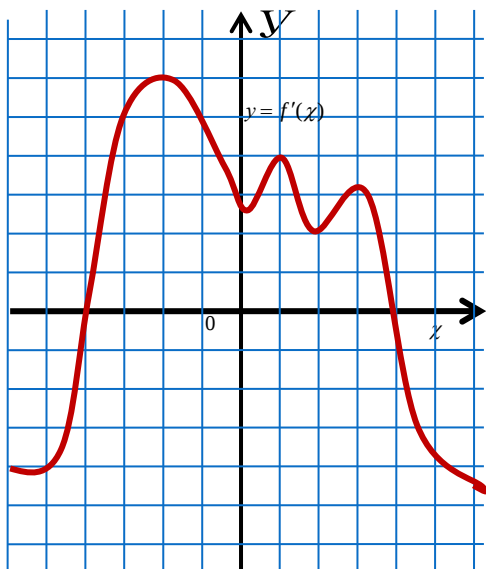
4) Работа с графиками

На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной в точке x_0 .

1) -2 2) 1,5 3) 3 4) 0



Найти точку x_0 , в которой функция принимает наименьшее (наибольшее) значение



IV. Проверка домашнего задания по образцу (во время проверки повторяется необходимый теоретический материал) – 5 мин.:

- Условия монотонности функции.
- Нахождение экстремумов функции.
- Алгоритм построения графиков функций с помощью производной.
- Алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значения функции на интервале.

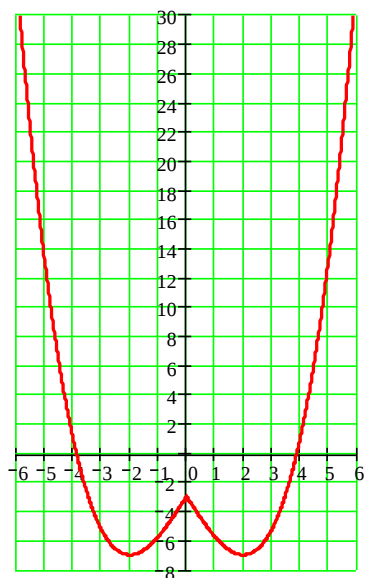
$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 - 3$ и построить эскиз её графика.

1. $D(f) = \mathbb{R}$.
2. $f'(x) = x^3 - 4x = x(x^2 - 4)$
3. $D(f') = \mathbb{R}$
4. $f'(x) = 0$ при $x=0$, $x=2$, $x=-2$

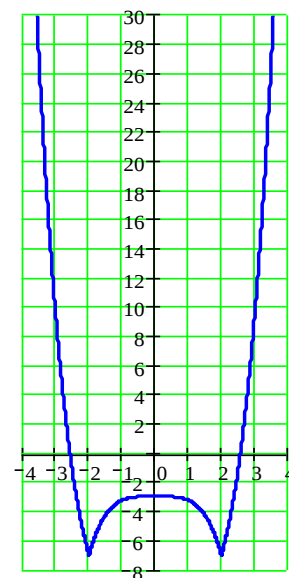
	$(-\infty; -2)$	-2	$(-2; 0)$	0	$(0; 2)$	2	$(2; +\infty)$
f'	-	0	+	0	-	0	+
f	$\searrow$	-7	$\nearrow$	-3	$\searrow$	-7	$\nearrow$
		min		max		min	

Какой линией соединить имеющиеся точки графика, чтобы она более точно передавала свойства заданной функции?

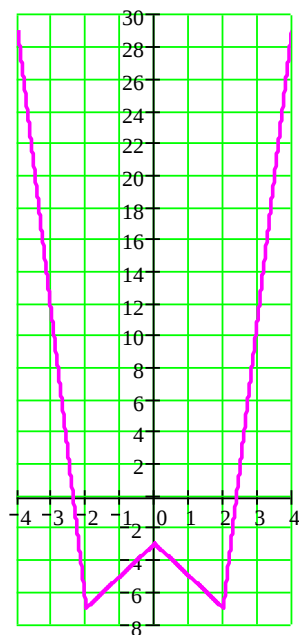
Предлагается 4 варианта соединения точек. Какой из них верный?



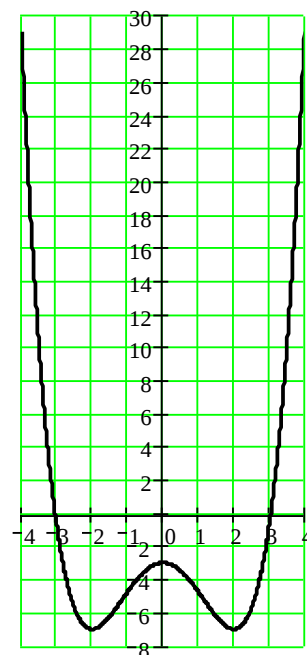
1



2



3



4

Ответить на вопрос, можно вспомнив, что во всех найденных точках экстремумов производная равна нулю. Значит, касательные к графику функции в этих точках должны быть параллельны оси **ОХ**. Это возможно только на рисунке 4. Таким образом, линия представленная на рисунке 4, наиболее точно отражает свойства заданной функции.

V. Закрепление изученного материала (решение заданий, аналогичных заданиям ЕГЭ) – 28 - 30 минут.

1) Найдите значение $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$, если $f(x) = \ln e^{\sin x}$.

Решение. Данная функция определена и дифференцируема на множестве всех действительных чисел.

Сначала упростим формулу, задающую функцию. Для этого применим свойство логарифмов.

$f(x) = \ln e^{\sin x} = \sin x$. Используем формулу для нахождения производной синуса.

$$f'(x) = \cos x, \text{ значит, } f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos \frac{\pi}{2} = 0.$$

Ответ: $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

2) Напишите уравнение касательной к графику функции $f(x) = \sqrt{1-x}$, проходящей через точку $P(2; 0)$. В ответе укажите площадь треугольника, образованного этой касательной и осями координат.

Решение. Точка $P(2; 0)$ не лежит на графике функции $f(x) = \sqrt{1-x}$, поэтому напишем уравнение касательной к графику данной функции в общем виде.

$$\text{Имеем: } y = -\frac{1}{2\sqrt{1-x_0}}(x-x_0) + \sqrt{1-x_0}. (*)$$

Точка $P(2; 0)$ лежит на касательной, подставим ее координаты в уравнение (*)

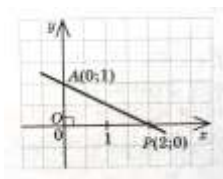
$$0 = -\frac{1}{2\sqrt{1-x_0}}(2-x_0) + \sqrt{1-x_0}, x_0 = 0$$

тогда уравнение (*) имеет вид: $y = -0,5x + 1$.

Найдем площадь треугольника, образованного этой касательной и осями координат.

$$S_{AOP} = \frac{1}{2} AO \cdot PO = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = 1.$$

Ответ: 1.



3) Помните рассказ о бароне Мюнхаузене ? Пушка стреляет под углом к горизонту. На ядре сидит барон Мюнхаузен. Определите характер движения ядра, если $v_{0y} = 15 \text{ м/с}$, $g \approx 10 \text{ м/с}^2$, $y_0 = 0$.

Решение. Имеет место равноускоренное движение по закону gt^2

$$y(t) = 15t - 5t^2.$$

Найдем скорость v_y .

$$v_y = y'(t),$$

$$v_y = 15 - 10t.$$

Движение совершается по параболе.

В наивысшей точке подъёма $v_y = 0$, $y'(t) = 0$, $15 - 10t = 0$, $t = 1,5$.

Для параболы в её вершине функция $y(t)$ достигает своего максимального значения.

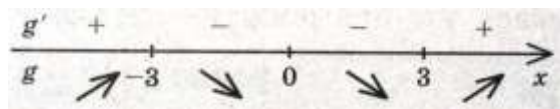
Вопрос. Какая связь между производной и функцией ?

Ответ. Когда $y'(t) = 0$, функция принимает максимальное значение.

4) Найдите точки экстремума функции $g(x) = x^5 - 15x^3$.

Решение. Функция $g(x)$ определена и дифференцируема на $\mathbf{R}$. В точках экстремума функции $g(x)$ производная функции $g'(x)$ меняет знак. Найдем $g'(x)$ и исследуем ее знак.

$$\text{Имеем: } g'(x) = 5x^4 - 45x^2 = 5x^2(x-3)(x+3).$$



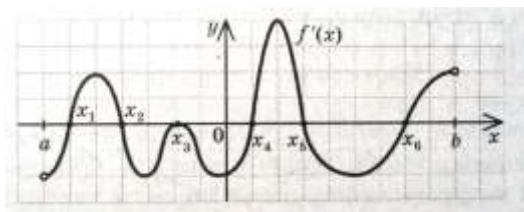
Функция имеет две точки экстремума: $x_{\max} = -3$, $x_{\min} = 3$.

Ответ: $x_{\max} = -3$, $x_{\min} = 3$.

Замечание. Функция $g(x) = x^5 - 15x^3$ имеет три критические точки -3, 0 и 3.

5) (устно)

На рисунке изображен график производной некоторой функции $y = f(x)$, заданной на промежутке $(a; b)$. Сколько точек минимума имеет функция $f(x)$ на этом промежутке?



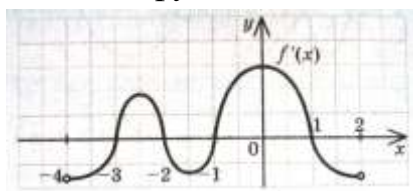
В точках минимума производная меняет знак с минуса на плюс. Таких точек три: x_1, x_4, x_6 .

Ответ: функция $y = f(x)$ имеет три точки минимума.

Замечание. Данная функция имеет две точки максимума (производная в этих точках меняет знак с плюса на минус): x_2 и x_5 . И шесть критических точек: $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$.

6) (устно)

Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-4; 2)$. График ее производной изображен на рисунке. Укажите число промежутков убывания функции.



Решение. Так как $f'(x) < 0$ на промежутках $(-4; -3)$,

$(-2; -1)$, $(1; 2)$, то число промежутков убывания равно 3.

Ответ: функция $y = f(x)$ имеет три промежутка убывания.

Замечание. Функция $y = f(x)$ имеет два промежутка возрастания.

Дополнительное задание (для учащихся, работающих индивидуально):

При торможении маятник за t секунд поворачивается на угол $\varphi = 5 + 6t - t^2$ (φ - в радианах). Найти угловую скорость ω маятника в момент $t = 2$ с: угловое ускорение в момент времени t : момент времени t , когда маятник остановится.

Решение.

Угловая скорость ω – скорость изменения угла φ за время Δt . Угловая скорость – производная от угла поворота φ по времени.

$$\omega = \varphi'(t) = 6 - 2t.$$

$$\omega(2) = 6 - 2 \cdot 2 = 6 - 4 = 2 \text{ (рад/с)}$$

Угловое ускорение – производная от угловой скорости по времени t .

$$\varepsilon = \omega'(t)$$

$$\varepsilon = -2 \text{ рад/с}^2$$

В момент остановки маятника $\omega = 0$: $\omega = 6 - 2t$.

VI. Презентация творческих работ учащихся (12 – 13 минут)

- Работа "[Производная в химии и биологии](#)"
- Работа "[Применение производной в физике](#)"
- Работа "[Применение производной в географии](#)"

В результате в тетрадях заполняется таблица.

Понятие на естественном языке	Обозначения	Понятие на математическом языке
Относительный прирост в данный момент времени	$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$	$P = x'(t)$
Средняя скорость химической реакции	$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta p}{\Delta t}$	$v/(t) = p'(t)$
Удельная теплоемкость тела	$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t}$	$C(t) = Q'(t)$
Сила тока	$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta g}{\Delta t}$	$I = g'(t)$
ЭДС	$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \Phi}{\Delta t}$	$E = -\Phi'(t)$

VII. Закрепление изученного материала (решение заданий, аналогичных заданиям ЕГЭ) – 13 -14 мин.

7) Рассматриваются всевозможные прямоугольные параллелепипеды, объем каждого из которых равен 4 см^3 , а одна из боковых граней является квадратом. Найдите среди них

параллелепипед с наименьшим периметром основания. В ответе укажите этот периметр.

Решение. Обозначим через x высоту, т.е. длину бокового ребра параллелепипеда. Тогда стороны его основания равны x и $\frac{4}{x^2}$, а периметр основания $P = 2\left(x + \frac{4}{x^2}\right)$. Исходя

из смысла задачи, переменная x принимает только положительные значения.

Исследуем функцию $P(x) = 2\left(x + \frac{4}{x^2}\right)$ на наименьшее значение при $x \in (0; +\infty)$. Для этого найдем производную функции и исследуем ее знак на промежутке $(0; +\infty)$.

$$\text{Имеем: } P'(x) = 2\left(1 - \frac{8}{x^3}\right) = 2 \frac{x^3 - 8}{x^3}.$$

Так $x_{\min} = 2$ является единственной критической точкой на промежутке $(0; +\infty)$, то функция $P(x)$ принимает в этой точке наименьшее значение, равное $P(2) = 6$.

Полученный результат означает, что наименьший периметр основания имеет прямоугольный параллелепипед с боковым ребром, равным 2 см, и сторонами в основании 2 см и 1 см.

Ответ: 6 см.

8) При каких значениях b прямая $y = bx$ является касательной к параболе $f(x) = x^2 - 2x + 4$?

Решение. Для того, чтобы прямая $y = bx$ была касательной к параболе $f(x) = x^2 - 2x + 4$ в точке с абсциссой x_0 , необходимо и достаточно, чтобы:

- 1) значения обеих функций при $x = x_0$ совпадали;
- 2) угловой коэффициент прямой $y = bx$ был равен значению производной функции $f(x) = x^2 - 2x + 4$ в точке x_0 .

Решим систему:

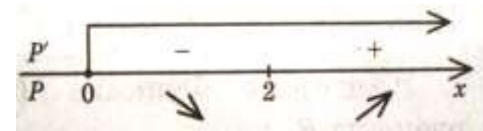
$$\begin{cases} bx_0 = x_0^2 - 2x_0 + 4 \\ b = 2x_0 - 2. \end{cases}$$

Подставив выражение для b в первое уравнение системы, получим

$$\begin{cases} (2x_0 - 2)x_0 = x_0^2 - 2x_0 + 4 \\ b = 2x_0 - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -2, \\ x_0 = 2, \\ b = 2x_0 - 2. \end{cases}$$

И искомые значения b равны -6 и 2.

Ответ: при $b = -6$, $b = 2$.



VIII. Работа в группах (15 мин.)

Учащиеся работают в группах по заданиям. Перед ними ставится следующая цель: необходимо использовать предоставленное время для того, чтобы все члены группы до конца уяснили суть данных заданий и отработали алгоритм их выполнения. Можно консультироваться с товарищами, получить консультацию у учителя.

Вариант I

1. Найдите минимум функции $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 6x + 25,5$.
2. Найдите угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $f(x) = 3 - x - 5x^2 + 2x^4$ в его точке с абсциссой $x_0 = -2$.
3. При каком наибольшем значении a функция $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + ax^2 - 3ax - 11$ убывает на всей числовой прямой?

Вариант II.

1. Найдите минимум функции $y = \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 15x + 35,5$.
2. Найдите сумму координат точки пересечения касательной, проведенной к графику функции $f(x) = 2x^2 - 3x - 3$ в его точке с абсциссой $x_0 = -2$, с осью абсцисс.
3. При каком наименьшем натуральном значении параметра m уравнение $\frac{1}{3}x^3 + x^2 - 15x = m$ имеет ровно один корень?

Вариант III.

1. Найдите максимум функции $y = -\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x + 8\frac{5}{6}$.
2. Точка движется по координатной прямой согласно закону $S(t) = 9 - 5t + 2t^4$.
Найдите ее скорость в момент времени $t = 3$.
3. При каком наибольшем значении a функция $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - ax^2 + 7ax + 5$ возрастает на всей числовой прямой?

IX. Выполнение творческого задания (2 мин).

Отыщите функцию, среди предложенных, исходя из её «автобиографии»:

Я – функция сложная, это известно,
 Ещё расскажу, если Вам интересно,
 Что точку разрыва и корень имею,
 И есть интервал, где расти не посмею.
 Во всём остальном положительна, право.
 И это конечно не ради забавы.
 Для чисел больших я стремлюсь к единице.
 Найдите меня среди прочих в таблице.

$y=0,25x^4$	$y=x^3-0,5x^2-2x+3$	$y=\frac{x+1}{x-1}$
$y=\frac{2x}{\sqrt{x^2-x}}$	$y=\frac{1}{\sqrt{3+4x^2}}$	$y=\left(\frac{x-2}{x+2}\right)^2$
$y=(x^2-1)^2$	$y=x(1-x)$	$y=\frac{x}{x^2-1}$

(«Автобиография» принадлежит функции $y=\left(\frac{x-2}{x+2}\right)^2$)

Х. Подведение итогов. Задание на дом на карточках.

Рефлексия деятельности (1 мин).

Учитель предлагает продолжить фразу:

«Сегодня на уроке я научился...»

«Сегодня на уроке я повторил...»

«Сегодня на уроке я закрепил...»

«Зачем мы учимся дифференцировать функции?»

Учитель подводит итог работы на уроке, отмечает активных учеников.

Сообщается учащимся, кому и на какие вопросы необходимо обратить внимание, при подготовке к контрольной работе.