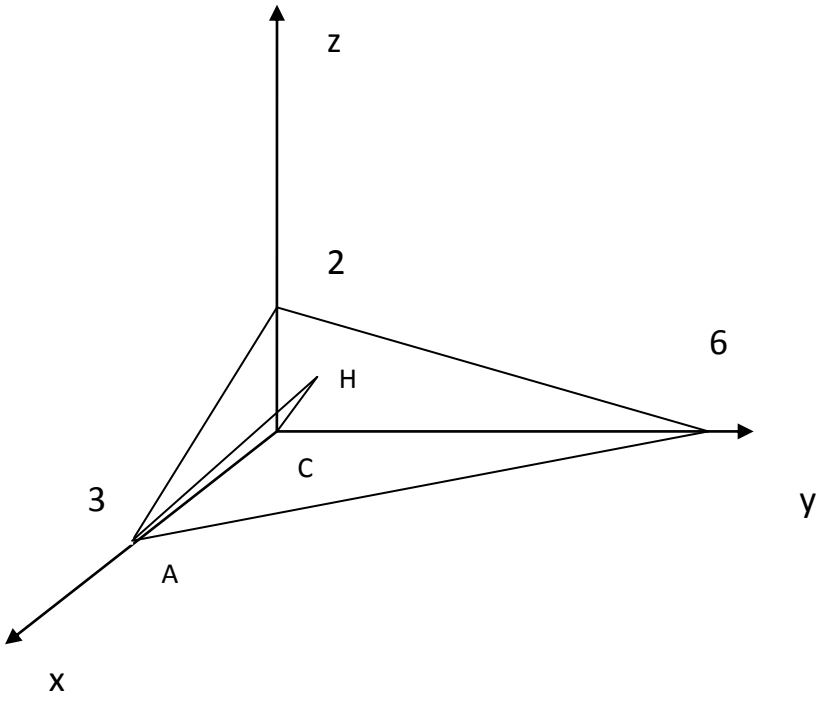
Вариант 1. Задача 1.

1. Дана плоскость $\frac{x}{3}+\frac{y}{6}+\frac{z}{2}=1$. Найти расстояние от начала координат до плоскости и угол, который она составляет с осью OX.

Решение:

1. Построим плоскость $\frac{x}{3}+\frac{y}{6}+\frac{z}{2}=1$.

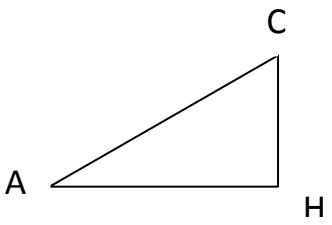


2. Найдём расстояние h от точки M (0; 0; 0) до заданной плоскости:

$$h = \frac{|A\cdot M_x + B\cdot M_y + C\cdot M_z + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Оно равно: $\frac{3\sqrt{14}}{7}$.

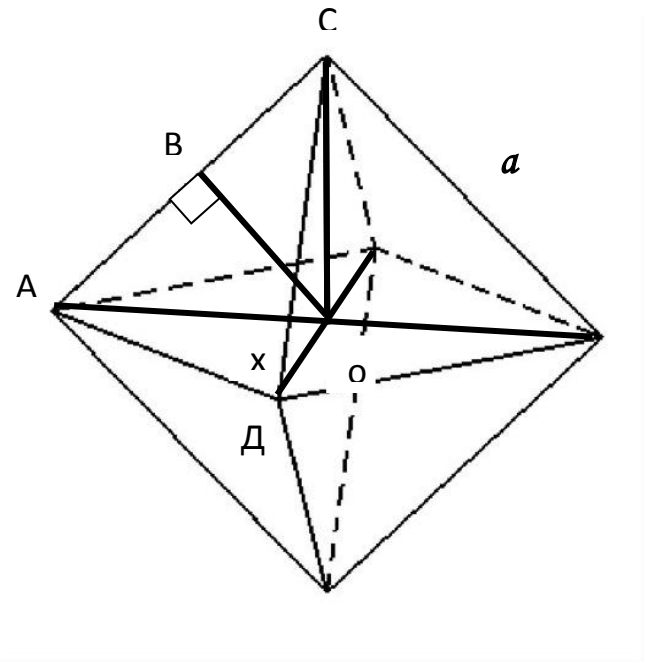
3. Найдём угол α из прямоугольного треугольника ABC:



AC= 3, HC= $\frac{3\sqrt{14}}{7}$, значит $sin\ A = \frac{\frac{3\sqrt{14}}{7}}{3} = \frac{\sqrt{14}}{7}$, следовательно угол A=$\sin^{-1}\frac{\sqrt{14}}{7}$

Ответ: H=$\frac{3\sqrt{14}}{7}$; A=$\sin^{-1}\frac{\sqrt{14}}{7}$

Задача 2. В правильной четырёхугольной пирамиде, представляющей собой половину правильного октаэдра, расстояние от центра основания до бокового ребра равно $3\sqrt{2}$ см. Найдите объём пирамиды.



OB=$3\sqrt{2}$ - дано.

Ребро октаэдра обозначим ***a,*** расстояние AO=x. Так как пирамида является половиной октаэдра, то её объём равен половине объёма октаэдра. Объём октаэдра равен $V=\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$

Необходимо найти ребро ***a.*** Из прямоугольного треугольника АОД получаем, что x=$\frac{a\sqrt{2}}{2}$

Из прямоугольного треугольника АОВ получаем, что $\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2=$ OB=18,

Откуда получаем, что ***a*=6$\sqrt{2}$.**

После подстановки в формулу нахождения объёма октаэдра получаем V= 288 см^3.

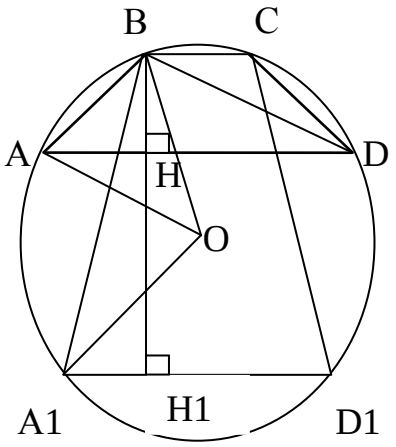
Объём пирамиды равен половине объёма октаэдра, то есть 144 см^3.

Ответ: 144 см^3

Задача 3.

Трапеция ABCD с основаниями AD и BC вписана в окружность с центром в точке O. Найдите высоту трапеции, если её средняя линия равна 3, и $\sin \angle AOB = \frac{3}{5}$.

Решение. Средняя линия трапеции = 3, sin AOB=0,6. Найти высоту трапеции ABCD.



Пусть угол AOB равен α. Проведём высоту BH и диагональ BD. Отрезок HD равен средней линии трапеции. Так как вписанный угол BDA в 2 раза меньше центрального угла AOB, то угол ADB = α/2. Из прямоугольного треугольника BHD найдём высоту BH.

BH=HD*tg(α/2). Используя формулу тангенса половинного аргумента $tg\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$.

Тогда BH= $tg\frac{\alpha}{2} = \frac{3\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$.

Случай 1 – угол α – острый.

cosα= 0,8 и BH = $\frac{3*0,6}{1+0,8}$ =1

Случай 2 – угол α – тупой.

cosα= -0,8 и BH = $\frac{3*0,6}{1-0,8}$ =9.

Ответ: 1или 9.

Задача 4.

В равнобедренном треугольнике ABC через середину основания AC - точку H проведена прямая, пересекающая AB в точке P и BC в точке M; BM : BP = 2, площадь треугольника ABC равна 16. Найдите площадь треугольника BPM.

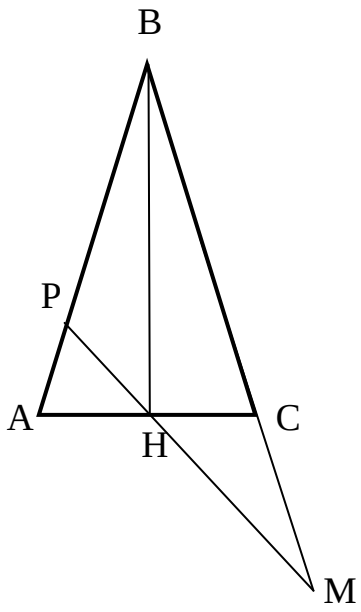
AB=BC

AH=HC

BM:PB=2

S_{ABC}=16

S_{BMP}=?



Обозначим сторону AB=BC через a. BP=x, BM=2x.

S_{ABC}=1/2 a^2 sinB=16, значит sinB = $\frac{32}{a2}$.

S_{BMP}=1/2 x*2x*sinB = 32 $(x/a)^2$.

По теореме Менелая $\frac{AH}{HC} * \frac{CM}{MB} * \frac{BP}{PA} = 1$.

Подставляя выражения получаем:

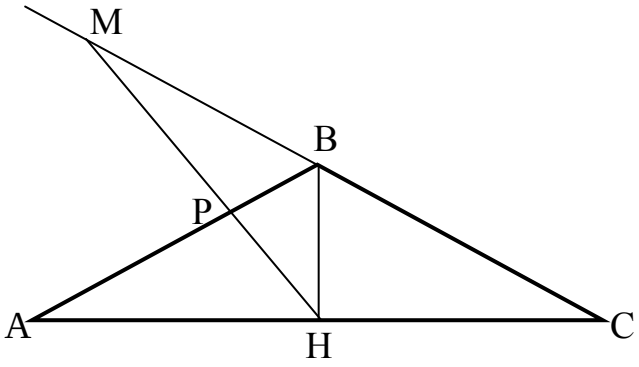
$$\frac{(2x - a)}{2x} * \frac{x}{a - x} = 1$$

Из этого выражения получаем, что $\frac{x}{a} = \frac{3}{4}$.

Подставляя в формулу S_{BMP}= 32*$(\frac{3}{4})^2$ =18 см^2.

Ответ: S_{BMP}=18 см^2.

Задача 2. Случай 2.



Аналогично:

Обозначим сторону AB=BC через a. BP=x, BM=2x, MC=2x+ a.

S_{ABC}=1/2 a^2 sinB=16, значит sinB = $\frac{32}{a2}$.

По формуле приведения $\sin MBP = \sin(\pi - ABC) = \sin ABC = \sin B$

S_{BMP}=1/2 x*2x*sinB = 32 $(x/a)^2$.

По теореме Менелая $\frac{BM}{MC} * \frac{CH}{AH} * \frac{AP}{PB} = 1$.

Подставляя выражения получаем:

$$\frac{2x}{2x+a} * \frac{a-x}{x} = 1$$

Из этого выражения получаем, что $\frac{x}{a} = \frac{1}{4}$.

Подставляя в формулу S_{BMP}= $32*(\frac{1}{4})^2$ =2 $см^2$.

Ответ: S_{BMP}=2 $см^2$.

Задача 5.

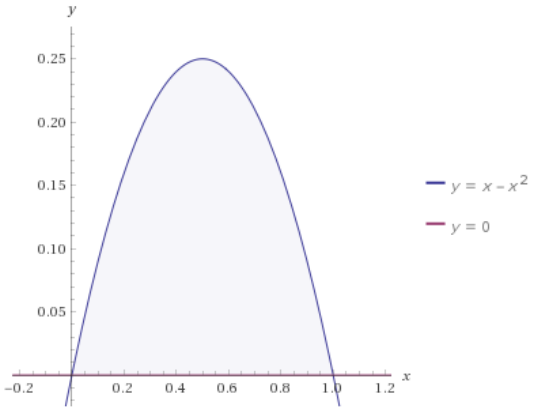
Найти ординату центра тяжести криволинейной трапеции, ограниченной линиями: $y = x - x^2$ и $y = 0$.

Построим график функции $y = x - x^2$

Выделим криволинейную трапеции.

Площадь криволинейной трапеции равна

$S=\int_0^1 (x - x^2)dx = \frac{1}{6}$.



Найдём ординату центра тяжести по формуле:

$y=\frac{Mx}{S}$, где $M_x = \frac{1}{2}\int_0^1 (x - x^2)^2 2dx$, решая определённый интеграл, получаем $M_x = \frac{1}{60}$

следовательно: $y= \frac{\frac{1}{60}}{\frac{1}{6}} = 0{,}1.$

Ответ: y = 0,1.