

Исследовательская работа по теме:
"Задачи на освещение (нестандартные)"

Выполнил:

ученик 11 "а" класса МБОУ СОШ №2
Барабинского района Новосибирской области
Беззубов Дмитрий

Руководитель:

учитель математики
высшей квалификационной категории
Лобанова Людмила Викторовна

Введение.

Математику уже затем учить надо, что она ум в порядок приводит (М.В. Ломоносов).

Математика – мой самый любимый предмет в школе. Я очень люблю решать математические кроссворды, ребусы, головоломки. Ведь именно с помощью этих игр развиваются воображение, логическое мышление и зрительная память. Также это возможность проводить творчески свободное время на переменах и после уроков.

Считаю тему своей работы "Решение нестандартных геометрических задач (задачи на освещение)" **актуальной**, так как в процессе работы с нестандартными задачами развивается смекалка и умение мыслить неординарно.

Цель моей работы: изучить особый вид нестандартных геометрических задач.

Задачи:

- изучить литературу по развитию науки геометрия;
- узнать, какие бывают головоломки;
- решить задачи на освещение на плоскости и в пространстве;
- составить задачник с решениями нестандартных геометрических задач на освещение.

Методы исследования:

- теоретический: сбор, обработка и анализ информации;
- практический: решение задач, составление и выпуск задачника.

Гипотеза: изучение способов решения задач на освещение позволит узнать много нового и интересного, расширит кругозор и интерес к геометрии.

Предмет исследования: геометрия

Объект исследования: геометрические нестандартные задачи на освещение на плоскости и в пространстве.

Глава I. Теоретическая часть.

1.1. Что такое «геометрическая головоломка»?

Само слово «геометрия» подразумевает использование в игре какой-либо фигуры. Главные фигуры в геометрических головоломках поделены на определённое количество частей. Суть игр - головоломок заключается в конструировании на плоскости разнообразных предметных силуэтов.

Игры – головоломки или геометрические конструкторы (мозаики) известны людям очень давно. Они интересны по содержанию, занимательны по форме, отличаются необычностью решения.

Кроме того, игры-головоломки помогают формировать такие жизненно важные качества как находчивость, быстроту, ловкость, самостоятельность, привычку к трудовому усилию, активную позицию.

В играх-головоломках развивается умение сосредоточенно думать, способность к длительному умственному напряжению, интерес к интеллектуальной деятельности, познавательный интерес, умение общаться, сотрудничать и взаимодействовать. Все эти качества необходимы для успешного овладения учебными дисциплинами в школе.

1.2. Нестандартные задачи.

Лев Моисеевич Фридман (русский советский психолог, педагог, математик, крупный специалист в области педагогической и математической психологии, доктор психологических наук, профессор) считает, что «Нестандартные задачи - это такие, для которых в курсе математики не имеется общих правил и положений, определяющих точную программу их решения».

«Нестандартность» – свойство относительное. Для человека, который впервые встречается с задачей, требующей применения новой для него идеи, задача является нестандартной.

Виды нестандартных задач:

- алгоритм Евклида;
- инварианты;
- задачи на раскраску;
- логические задачи;
- арифметические задачи;
- задачи на разрезание;
- задачи на переливания;
- задачи на движение;
- задачи на взвешивания;
- задачи на выигрышные ситуации;
- геометрические задачи.

1.3. Нестандартные геометрические задачи.

Нестандартная задача – это задача, о которой решающему ее не известны ни идея решения, ни даже то, на каком известном разделе теории основано хотя бы одно из возможных решений.

В курсе геометрии выделяют следующие виды нестандартных задач:

- на доказательство;
- на построение;
- на вычисление;
- занимательные.

Нестандартные задачи, выполняют несколько функций:

- развивают и поддерживают интерес к математике, помогают реализовать склонности и возможности;

- развивают творческие способности;
- способствуют лучшему пониманию и осмыслению изучаемого материала;
- являются хорошим средством от информационной перегрузки.

При построении геометрических задач необходимо строить чертежи. Для построения чертежа надо выполнять ряд требований. Главные из них:

1) Чертеж должен представлять собой схематический рисунок основного объекта задачи с обозначением с помощью букв и других знаков всех элементов фигуры и некоторых их характеристик. Если в тексте задачи указаны какие-либо обозначения фигуры или ее элементов, то эти обозначения должны быть и на чертеже; если же в задаче никаких обозначений нет, то следует воспользоваться общепринятыми обозначениями или придумать наиболее удобные.

2) Чертеж должен соответствовать задаче. Это означает, что если в задаче в качестве основного объекта назван, например, треугольник и при этом не указан его вид (прямоугольный, равносторонний и т. д.), то надо построить какой-либо разносторонний треугольник. Или если в задаче в качестве основного объекта названа трапеция и не указан ее вид, то не следует строить равнобедренную или прямоугольную трапецию и т. д.

3) При построении чертежа нет надобности выдерживать строго какой-либо определенный масштаб. Однако желательно соблюдать какие-то пропорции в построении отдельных элементов фигуры. Например, если по условию задачи сторона АВ треугольника ABC наибольшая, то это должно быть соблюдено на чертеже. Или если задана медиана треугольника, то соответствующий ей отрезок на чертеже должен проходить приблизительно через середину стороны треугольника и т. д.

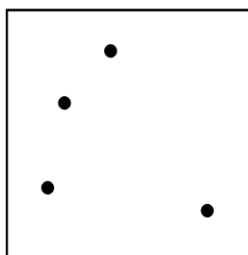
4) Точно так же надо соблюдать на чертеже такие отношения, как параллельность, перпендикулярность и другие, заданные в задаче.

5) При построении чертежей фигур необходимо соблюдать все правила черчения.

Глава II. Практическая часть.

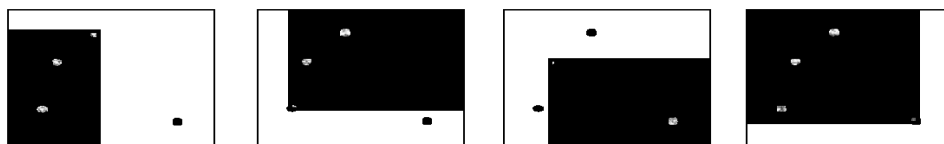
Для многих людей раздел математики - геометрия - кажется очень скучной, но, на самом деле, есть много интересных задач, любопытных и неожиданных. Я хочу познакомить вас с геометрическими задачами, не рассматриваемыми на уроках геометрии, но которые можно применять на внеурочных занятиях.

Задача 1. На плоскости отмечены четыре точки (рис. 1). В каждой точке находится прожектор, освещающий угол 90° . Как надо развернуть эти прожекторы, чтобы была освещена вся плоскость?



(рис. 1)
рис. 2:

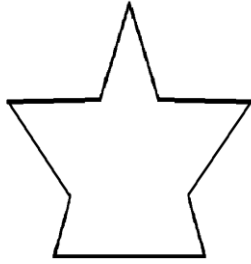
Решение: Прожекторы можно развернуть так, как на



Задача 2. Прожектор расположенный в точке А, освещает угол 90° с вершиной А. Докажите, что для освещения всей плоскости четырех прожекторов хватит, а трех – не хватит.

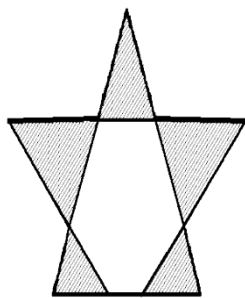
Решение: Даже если поставить три прожектора впритык, то они осветят только угол 270° , а если их повернуть, то сумма освещенных углов не увеличится.

Задача 3. Комната имеет форму многоугольника (рис. 3). В каких точках можно располагать источник света так, чтобы он освещал всю комнату? Как называется фигура, состоящая из всех таких точек?



(рис. 3)

Решение: Источник света можно располагать в точках белого (незакрашенного) шестиугольника (рис. 4):



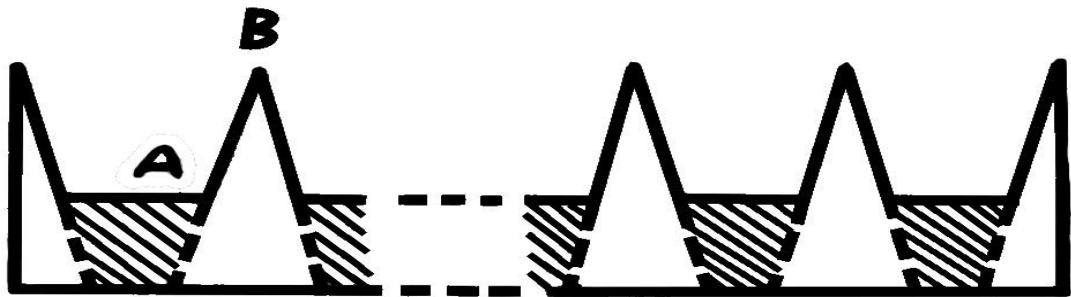
(рис. 4)

Задача 4. Будем считать, что лампа – точечный источник света, освещающий всю плоскость, если нет препятствий. Какое наименьшее число ламп требуется, чтобы можно было осветить изнутри контур произвольного n -угольника при данном n ?

Комментарий. Фонарь, размещенный на какой-либо грани многогранника, освещает всю эту грань. При этом если поместить фонарь на ребре, то он освещает обе грани, прилежащие к ребру. Будем считать, что точечный источник света освещает все пространство, если оно пустое. Решите следующие задачи при условии, что планета имеет форму: а) тетраэдра; б) куба; в) октаэдра; г) икосаэдра; д) додекаэдра

Решение: Ответ. $\left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$. Пусть $k = \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$, поэтому $n = 3k + r$, где $r = 0, 1, 2$. В произвольном n -угольнике $A_1A_2\dots A_n$ можно так провести некоторые диагонали, что они разобьют n -угольник на $(n - 2)$ треугольников с вершинами в точках $A_t (1 \leq t \leq n)$ (докажите это). Треугольник $A_{p-1}A_pA_{p+1}$ назовем первым. У него две стороны – это стороны n -угольника, а сторона $A_{p-1}A_{p+1}$ – диагональ n -угольника. Треугольник, смежный с первым по стороне $A_{p-1}A_{p+1}$, назовем вторым и т.д. Первые $r+1$

треугольников дают первую «комнату» и т.д. Получаем k «комнат»: первая треугольная (при $r = 0$), четырехугольная (при $r = 1$) или пятиугольная (при $r = 2$), остальные пятиугольные. Для освещения изнутри m -угольника (при $m \leq 5$) достаточно одной лампы (по задаче 8). Поэтому для освещения изнутри исходного многоугольника достаточно k ламп (по числу «комнат»). Покажем, что при $n = 3k$ найдется n -угольник, для освещения которого изнутри не хватает $k - 1$ ламп. На рис. 19 изображена «расческа», у которой k зубцов. Каждому зубцу соответствует треугольник (на рис. 5 это незакрашенные участки). Для освещения такого отрезка, как AB , необходима лампа внутри треугольника, на контуре которого лежит AB . Итого k ламп. Аналогичные примеры строятся при $n = 3k + r$, где $r = 1$ или $r = 2$, что и доказывает справедливость ответа, приведенного выше.



(рис. 5)

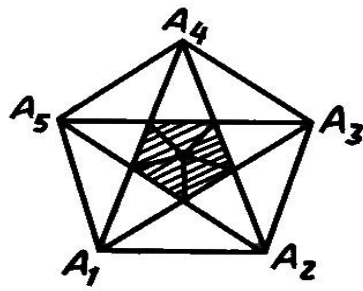
Решить следующие задачи при условии, что планета имеет форму:

а) тетраэдра; б) куба; в) октаэдра; г) икосаэдра; д) додекаэдра.

Задача 5. На поверхности планеты расположены фонари. Известно, что все ребра этой планеты освещены. Какое наименьшее число фонарей возможно при этих условиях?

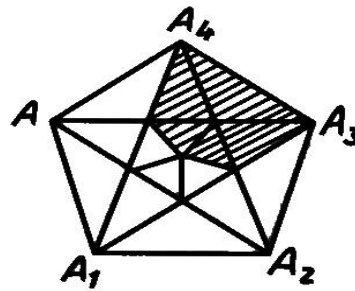
Решение: Чтобы один фонарь освещал как можно больше ребер планеты, необходимо расположить его в одной из ее вершин. В случае тетраэдра достаточно одного фонаря, в случае куба и октаэдра нужны два фонаря. Каждый источник света, расположенный в вершине икосаэдра, освещает 10 ребер. Поскольку всего 30 ребер, то требуется не менее трех источников света. Покажем, что трех источников не хватит. *С л у ч а й 1.* Расположим два фонаря симметрично относительно центра икосаэдра. Пусть первый

освещает пять граней в центре схемы (на рис. 6, а они заштрихованы), второй – пять граней с другой стороны.

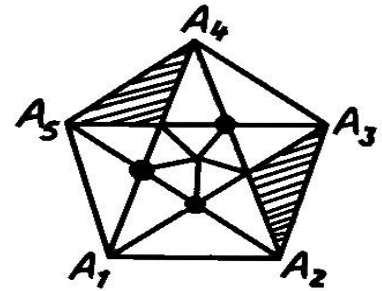


а)

рис. 6



б)



в)

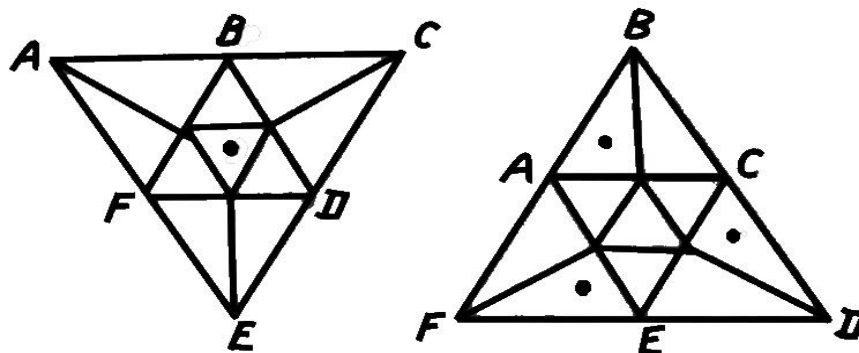
Любой третий фонарь (он расположен в вершине какой-то грани – одной из 10 «по экватору») – освещает три новые грани и две, освещенные ранее. Таким образом, третий и четвертый фонари осветят по четыре ребра, не освещенных первыми фонарями. И всего окажутся освещенными 28 ребер. Освещение двух остальных обеспечит пятый фонарь.

С л у ч а й 2 .

Первый фонарь освещает пять граней, которые не видны на рис. 6, б, а второй – еще пять. У одной пятерки и у другого одно общее ребро. Значит, эти фонари освещают 14 ребер. Еще 15 ребер осветит третий фонарь. Итого 29 ребер будут освещены. Поэтому опять трех источников света не хватит. А четырех фонарей достаточно. На рис. 6, в, показаны три фонаря на лицевой стороне, еще один фонарь находится в центре изнанки чертежа (на рисунке закрашены неосвещенные грани). Проанализируем теперь освещение додекаэдра. У него 30 ребер. Один фонарь, размещенный в вершине освещает 12 ребер. Значит, потребуется не менее трех фонарей. Докажите, что трех фонарей недостаточно, а четырех хватает.

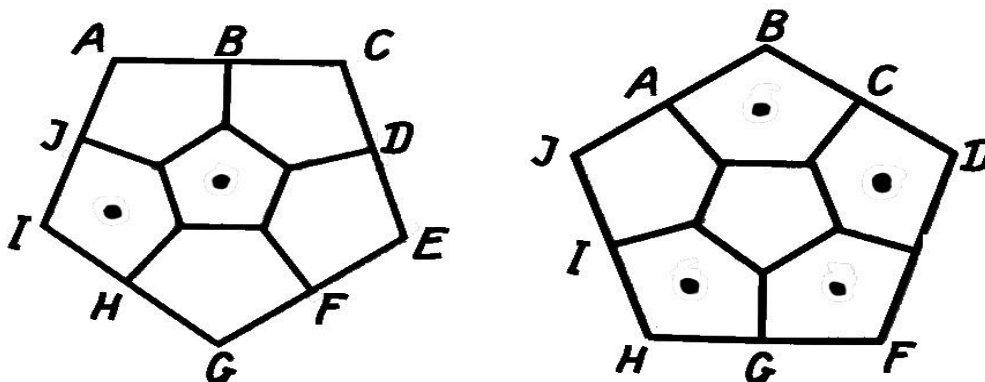
Задача 6. Внутри некоторых граней (т.е. не на ребрах) планеты расположены фонари. Известно, что все вершины этой планеты освещены. Какое наименьшее число фонарей возможно при этих условиях?

Для тетраэдра, куба и октаэдра требуется по два фонаря. В случае икосаэдра нужны четыре фонаря: один на лицевой стороне (рис. 7, а) и три – на тыльной (рис. 7, б).



(рис. 7)

Рассмотрим теперь додекаэдр. Пространственную замкнутую десятизвездную ломаную (на рис. 8 ее вершины обозначены буквами) назовем экватором. Эти 10 вершин принадлежат, самое малое, пять различным освещенным граням. Если «выше» экватора находится одна грань с фонарем, а «ниже» - четыре освещенные грани, прилежащие к экватору, то некоторые три вершины «полярной» грани не освещены. Аналогично, если «выше» экватора имеются две освещенные грани, прилежащие к экватору, а «ниже» - три такие грани, от у «полярной» грани найдется вершина, не лежащая ни на одной освещенной грани. Итак, пяти фонарей недостаточно, а шести – достаточно. Пример см. на рис. 7:



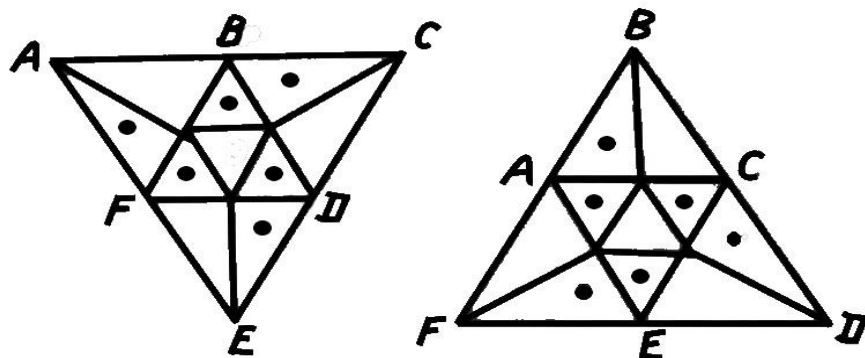
а)

(рис. 7)

б)

Задача 7. Внутри некоторых граней (т.е. не на ребрах) планеты расположены фонари. Известно, что все ребра этой планеты освещены. Какое наименьшее число фонарей возможно при этих условиях?

Решение: В случае тетраэдра – три фонаря, в случаях куба и октаэдра – по четыре.

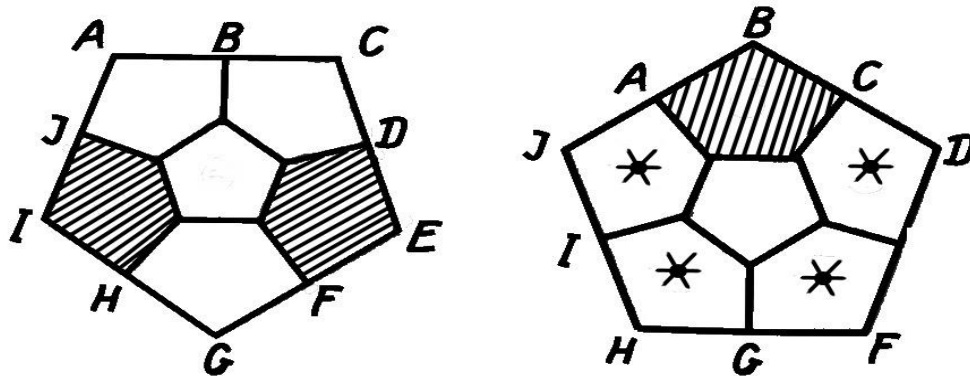


а)

(рис. 8)

б)

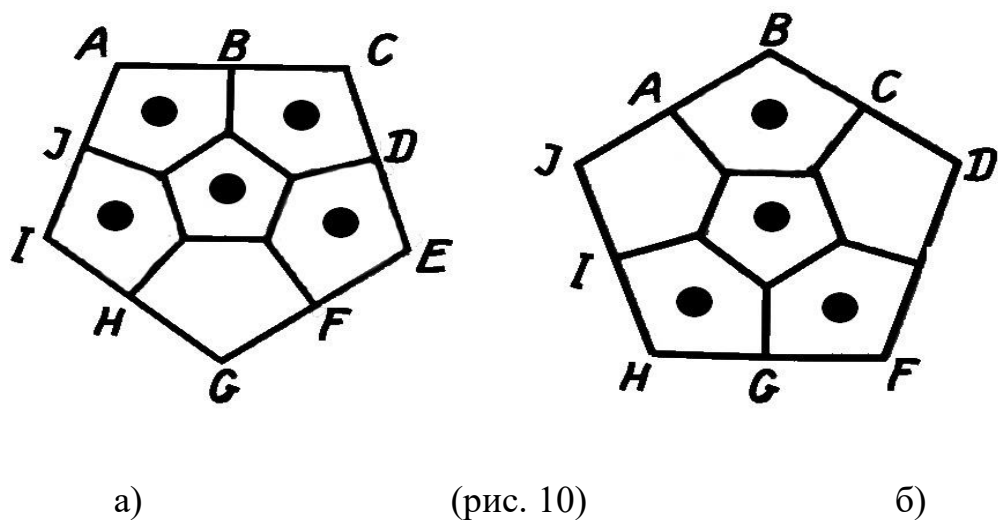
У икосаэдра в каждой вершине сходятся пять граней. Чтобы осветить ребра этих пяти граней, сходящихся в одной вершине, двух фонарей недостаточно, а трех хватает. Ломанная ABCDEF (рис. 8) делит поверхность икосаэдра на две части, в каждой из которых десять граней. Для освещения ребер десяти граней достаточно шести фонарей. А значит, для освещения всех ребер икосаэдра достаточно 12 фонарей. Их возможное размещение на фасадной и тыльной частях многогранника показано на рис. 8, а, б. У додекаэдра две соседние грани не могут быть не освещены, так как иначе их общее ребро будет не освещено. Каково наименьшее число граней, никакие два из которых не имеют общего ребра? Так как «ниже» экватора могут быть неосвещенными только две грани (на рис. 9, а они закрашены) тогда «выше» экватора четыре грани (на рис. 9, б они отмечены звездочкой) должны быть освещены. Есть место только для одной неосвещенной грани. Следовательно, не более трех граней додекаэдра без фонарей, не менее 9 – с фонарями. Пример, когда девять граней освещены, дан на рис. 10. Здесь пять фонарей располагаются на лицевой стороне фигуры, а четыре – на тыльной.



а)

(рис. 9)

б)



Закключение.

Математических задач сотни тысяч. Но среди них есть реальные жемчужины, после решения которых многие влюбляются в эту науку. Эти задачи не будут на шаблонных экзаменах вроде ЕГЭ или ОГЭ, их редко встретишь на олимпиадах, такие задачи — это штучный продукт.

Геометрия является элементом общей человеческой культуры, а целенаправленное ее изучение формирует и развивает не только математические, но и интеллектуальные способности. Уникальность геометрии как учебного предмета заключается в том, что она позволяет наиболее ярко наблюдать, формировать и развивать мыслительные процессы различных видов и уровней. Успешное изучение геометрии невозможно без развитого наглядного и абстрактно-теоретического мышления. Задачи на освещение предоставляют прекрасные возможности для цельного и гармоничного развития интуитивного, логического, пространственного, символического и конструктивного компонентов умственной деятельности.

Цель моей работы: изучить особый вид нестандартных геометрических задач- достигнута. Поставленные задачи- выполнены.

Я составил и выпустил задачник с решениями и предоставил учителям математики для работы в 7-11 классах на факультативных занятиях. В ходе бесед с учащимися, учителями, по их наблюдениям за работой учащихся, на

уроках выявлен возросший интерес учеников к урокам математики, чтению литературы по занимательной математике, таким образом, моя гипотеза (изучение способов решения задач на освещение на плоскости и в пространстве позволит узнать много нового и интересного, расширит кругозор и интерес к геометрии) подтвердилась.

Информационное обеспечение.

Основные источники:

Периодические издания (отечественные журналы):

1. Математика [Текст] : методический журнал для учителей математики / учредитель ООО «Чистые пруды». - . - Москва : ИД «Первое сентября», 2010 - . - Ежемес. - [<http://mat.1september.ru/>].
2. Научно-теоретический и методический журнал «Математика в школе».
3. Научные исследования в образовании [Текст] : приложение к журналу «Профессиональное образование. Столица» / учредители Департамент образования города Москвы; Российская академия образования; Академия профессионального образования. – 2006 – . – Москва : НИИРПО, 2013 – . – Ежемес.

Интернет-ресурсы:

1. Вся математика в одном месте – математический портал [Электронный ресурс]. - Режим доступа : <http://www.allmath.ru>, свободный. - Загл. с экрана. – (Дата обращения: 01.03.15)
2. Математика: справочник формул по алгебре и геометрии, решения задач и примеров. Математические формулы on-line [Электронный ресурс]. - Режим доступа : <http://www.pm298.ru>, свободный. - Загл. с экрана. - (Дата обращения: 01.03.15).
3. Форум - математический сайт allmatematika.ru [Электронный ресурс]. - Режим доступа : <http://www.allmatematika.ru>, свободный. - Загл. с экрана. - (Дата обращения: 01.03.15).
4. Электронно-библиотечная система издательства «Лань» [Электронный ресурс]. - Режим доступа : <http://lanbook.com/ebs.php>, для доступа к информ. ресурсам требуется авторизация. - Загл. с экрана.- (Дата обращения: 01.03.15).