

**Работа с одаренными детьми.
«Различные подходы к решению
уравнений и систем уравнений».**

2021-2022 учебный год.

**Учитель ГБОУ СОШ г. Беслан
Хасиева А.Х.**

Цель исследования: наряду с использованием традиционных способов решения уравнений и систем уравнений, пользоваться различными способами их решения.

Объект исследования: уравнения и системы уравнений.

Предмет исследования: различные (нестандартные) способы решения уравнений и систем уравнений.

Гипотеза исследования: решение некоторых уравнений и систем уравнений нестандартными способами более эффективно, чем традиционными способами, и в некоторых случаях является единственным способом решения. Необходимость и актуальность исследования определяется тем, что умение решать уравнения и системы уравнений различными способами дает умение строить математические модели, использовать их на практике, затрачивать меньше времени на решение задания повышенной сложности, познавать тонкости математической науки.

В этой работе показаны уравнения и система уравнений, которые можно решить традиционными способами и нестандартными (непривычными для нас):

- введением тригонометрической функции,
- с помощью введения векторов,
- введением новой переменной,
- использование идеи однородности,
- введением трех переменных, для решения системы, содержащей две неизвестные.

Задача №1.

Решить уравнение:

$$\sqrt{x^2 - 12x + 40} + \sqrt{x^2 - 4x + 5} = 5$$

Решение.

1 способ

$$\sqrt{x^2 - 12x + 40} + \sqrt{x^2 - 4x + 5} = 5$$

Возведем обе части уравнения в квадрат

$$x^2 - 12x + 40 + x^2 - 4x + 5 + 2\sqrt{(x^2 - 12x + 40)(x^2 - 4x + 5)} = 25$$

$$2x^2 - 16x + 45 - 25 = -2\sqrt{(x^2 - 12x + 40)(x^2 - 4x + 5)}$$

$$x^2 - 8x + 10 = -\sqrt{(x^2 - 12x + 40)(x^2 - 4x + 5)}$$

Возведем обе части уравнения еще раз в квадрат, получим

$$x^4 - 16x^3 + 64x^2 + 20x^2 - 160x + 100 = x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 12x^3 + 48x^2 - 60x + 40x^2 - 160x + 200$$

$$x^4 - 16x^3 + 84x^2 - 160x + 100 = x^4 - 16x^3 + 93x^2 - 220x + 200$$

$$9x^2 - 60x + 100 = 0$$

$$D_1 = 900 - 900 = 0$$

$$x = \frac{30}{9} = \frac{10}{3}$$

Ответ: $\frac{10}{3}$.

2 способ

$$\sqrt{x^2 - 12x + 40} + \sqrt{x^2 - 4x + 5} = 5$$

В подкоренных выражениях выделим квадрат разности, получим

$$\sqrt{(6-x)^2 + 4} + \sqrt{(x-2)^2 + 1} = 5$$

Введем векторы:

$$\vec{a}(6-x; 2) \text{ и } \vec{b}(x-2; 1)$$

Найдем длины векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$

$$|\vec{a}| = \sqrt{(6-x)^2 + 2^2}; |\vec{b}| = \sqrt{(x-2)^2 + 1}; |\vec{a}| + |\vec{b}| = 5 \quad (1)$$

Пусть $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$; $\vec{c}(c_1; c_2)$

$$c_1 = 6 - x + x - 2 = 4$$

$$c_2 = 2 + 1 = 3$$

$$|\vec{c}|(4; 3), |\vec{c}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5 \quad (2)$$

Воспользуемся неравенством с модулем

$$|\vec{a}| + |\vec{b}| \geq |\vec{a} + \vec{b}|, \text{ имеем}$$

$$|\vec{a}| + |\vec{b}| \geq |\vec{c}|.$$

Но из (1) и

(2) следует, что $|\vec{a}| + |\vec{b}| = |\vec{a} + \vec{b}|$, а это означает, что векторы $\vec{a}(6-x; 2)$ и $\vec{b}(x-2; 1)$

коллинеарны, поэтому координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ пропорциональны

$$\frac{6-x}{x-2} = \frac{2}{1};$$

$$6-x = 2x-4$$

$$6+4=3x$$

$$x = \frac{10}{3}$$

Ответ: $x = \frac{10}{3}$.

Задача №2.

Решить уравнение:

$$\sqrt{3x^2 - 5x + 7} + \sqrt{3x^2 - 7x + 2} = 3$$

Решение:

$$\sqrt{3x^2 - 5x + 7} + \sqrt{3x^2 - 7x + 2} = 3 \quad (1)$$

Пусть $m = 3x^2 - 5x + 7$; $n = 3x^2 - 7x + 2$

$$\sqrt{m} = \sqrt{3x^2 - 5x + 7} \text{ и } \sqrt{n} = \sqrt{3x^2 - 7x + 2}$$

Если $\sqrt{m} - \sqrt{n} \neq 0$, то справедливо следующее равенство

$$\frac{m - n}{\sqrt{m} - \sqrt{n}} = \sqrt{m} + \sqrt{n}, \text{ и в нашем случае } \sqrt{m} + \sqrt{n} = 3$$

$$\frac{3x^2 - 5x + 7 - (3x^2 - 7x + 2)}{\sqrt{3x^2 - 5x + 7} - \sqrt{3x^2 - 7x + 2}} = 3$$

$$\frac{3x^2 - 5x + 7 - 3x^2 + 7x - 2}{\sqrt{3x^2 - 5x + 7} - \sqrt{3x^2 - 7x + 2}} = 3$$

$$\frac{2x + 5}{\sqrt{3x^2 - 5x + 7} - \sqrt{3x^2 - 7x + 2}} = 3$$

$$\sqrt{3x^2 - 5x + 7} - \sqrt{3x^2 - 7x + 2} = \frac{2x+5}{3} \quad (2)$$

Сложим (2) с исходным уравнением (1)

$$\sqrt{3x^2 - 5x + 7} + \sqrt{3x^2 - 7x + 2} = 3, \text{ получим:}$$

$$2\sqrt{3x^2 - 5x + 7} = \frac{2x+5}{3} + 3 = \frac{2x+14}{3}$$

$$\sqrt{3x^2 - 5x + 7} = \frac{x + 7}{3}$$

Возведем обе части полученного уравнения в квадрат

$$3x^2 - 5x + 7 = (x^2 + 14x + 49)/9$$

$$27x^2 - 45x + 63 = x^2 + 14x + 49$$

$$26x^2 - 59x + 14 = 0$$

$$D = 3481 - 4 \times 26 \times 14 = 3481 - 1456 = 2025$$

$$x_1 = \frac{59+45}{2 \times 26} = \frac{104}{52} = 2$$

$$x_2 = \frac{59-45}{52} = \frac{14}{52} = \frac{7}{26}$$

Проверкой убеждаемся, что оба корня удовлетворяют данному уравнению.

Ответ: $\frac{7}{26}$; 2.

Задача №3.

Решить уравнение:

$$\sqrt{x^2 + 1} - x = \frac{5}{2\sqrt{x^2 + 1}}$$

1 способ

$$\sqrt{x^2 + 1} - x = \frac{5}{2\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$x = \operatorname{tg} t, \quad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$$

$$x^2 + 1 = \operatorname{tg}^2 t + 1 = \frac{1}{\cos^2 t}$$

$$\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}} - \operatorname{tg} t = \frac{5}{2\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}}}$$

$$\text{Т.к. } -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}, \text{ то } \cos x > 0$$

$$\frac{1}{\cos t} - \operatorname{tg} t = \frac{5 \cos t}{2}$$

$$\frac{1}{\cos t} - \frac{\sin t}{\cos t} - \frac{5 \cos t}{2} = 0, \cos t \neq 0; t \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$2 - 2 \sin t - 5 \cos^2 t = 0$$

$$5 \cos^2 t + 2 \sin t - 2 = 0$$

$$5(1 - \sin^2 t) + 2 \sin t - 2 = 0$$

$$5 - 5 \sin^2 t + 2 \sin t - 2 = 0$$

$$5 \sin^2 t - 2 \sin t - 3 = 0$$

$$\sin t = 1 \quad \text{и} \quad \sin t = -\frac{3}{5}$$

$$\text{не удов. решению ур-я} \quad t = \arcsin\left(-\frac{3}{5}\right)$$

$$\text{Итак, } x = \operatorname{tg}\left(\arcsin\left(-\frac{3}{5}\right)\right) = -\frac{3}{4}$$

$$\operatorname{tg}(\arcsin a) = \frac{a}{\sqrt{1-a^2}}, \text{ при } -1 < a < 1$$

Ответ: $x = -\frac{3}{4}$.

2 способ

$$\sqrt{x^2 + 1} - x = \frac{5}{2\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$\sqrt{x^2 + 1} = t, t > 0$$

$$x^2 + 1 = t^2, x^2 = t^2 - 1, x = \sqrt{t^2 - 1}$$

$$t - \sqrt{t^2 - 1} = \frac{5}{2t}$$

$$t - \frac{5}{2t} = \sqrt{t^2 - 1}$$

$$\frac{2t^2 - 5}{2t} = \sqrt{t^2 - 1}$$

$$\frac{4t^4 - 20t^2 + 25}{4t^2} = \frac{t^2 - 1}{1}$$

$$4t^4 - 20t^2 + 25 = 4t^4 - 4t^2$$

$$25 = 16t^2$$

$$t^2 = \frac{25}{16}$$

$$t = \frac{5}{4}, \quad t = -\frac{5}{4} \text{ (не удовлетворяет условию } t > 0)$$

$$x^2 + 1 = \frac{25}{16}$$

$$x^2 = \frac{25}{16} - \frac{16}{16} = \frac{9}{16}$$

$$x_{1,2} = \pm \frac{3}{4}$$

Убеждаемся проверкой, что корнем является число $x = -\frac{3}{4}$

Ответ: $x = -\frac{3}{4}$.

Задача №4.

Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} \sqrt{1 - 3x} - 1 = \sqrt{5y - 3x}, \\ \sqrt{5 - 5y} + \sqrt{5y - 3x} = 5. \end{cases}$$

Решение:

$$\sqrt{1-3x} = m, \sqrt{5y-3x} = n$$

$$\sqrt{5-5y} = k; \quad m, n, k \geq 0 \quad (1)$$

$$\begin{cases} m-1 = n, \\ k+n = 5; \end{cases}$$

$$\begin{cases} m = n+1, \\ k = 5-n. \end{cases}$$

Рассмотрим

$$m^2 - n^2 - k^2 = 1 - 3x - (5y - 3x) - (5 - 5y) = 1 - 3x - 5y + 3x - 5 + 5y = -4$$

$$(n+1)^2 - n^2 - (5-n)^2 = -4$$

$$n^2 + 2n + 1 - n^2 - 25 + 10n - n^2 + 4 = 0$$

$$-n^2 + 12n - 20 = 0$$

$$n^2 - 12n + 20 = 0$$

$$n_1 = 10 \quad \text{и} \quad n_2 = 2.$$

1) Если $n_1 = 10$, то $m = 10+1=11$, $k = 5 - 10 = -5 < 0$ (не удовлетворяет условию (1)).

2) Если $n_2 = 2$, то $m = 2 + 1 = 3$, $k = 5 - 2 = 3$.

$$\begin{cases} \sqrt{1-3x} = 3, \\ \sqrt{5y-3x} = 2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1-3x = 9, \\ 5y-3x = 4; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -\frac{8}{3}, \\ y = -\frac{4}{5}. \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } x = -\frac{8}{3}; \quad y = -\frac{4}{5}.$$

Задания для самостоятельного решения

1. Решить уравнение: $\sqrt{x^2 + 2x + 1} + \sqrt{x^2 - 2x + 1} = 6$

2. Решить уравнение: $\sqrt{x^2 + 6x + 9} + \sqrt{x^2 - 6x + 9} = 18$

3. Решить уравнение: $\sqrt{2x^2 + x + 6} - \sqrt{2x^2 + x + 1} = 1$

4. Решить систему:

$$\begin{cases} \sqrt{11x-y} - \sqrt{y-x} = 1, \\ \end{cases}$$

$$7\sqrt{y-x} + 6y - 26x = 3.$$

Заключение.

В работе представлены нестандартные способы решения уравнений, позволяющие значительно упростить и ускорить ход решения заданий. Применение эффективных методов для решений заданий повышенной сложности, окажет практическую помощь обучающимся при изучении новых тем. Выполненная работа может быть использована учителями математики для элективных курсов, обучающимися для повторения и систематизации материала по данной теме.

Источники информации:

Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс: учеб. для общеобразоват. Организации: базовый и углубл. уровни / [С.М.Никольский, М.К.Потапов, Н.Н.Решетников и др.]. – 4-е изд. – М: Просвещение. 2018;

В.П.Супрун, М.: Издательство ЛКИ, 2008.-194 с.; «Математика для старшеклассников»;

Материалы, взятые из интернет-ресурсов.

