



*Министерство образования и науки Республики Бурятия
МАОУ «Хоринская СОШ №1 им. Д.Ж.Жанаева»*

Метод математической индукции

*Выполнил: Ширапов Булат,
11Б класс, МАОУ «ХСОШ №1
им. Д.Ж.Жанаева»*

*Руководитель: С.Т.Садовская,
учитель математики МАОУ
«ХСОШ №1 им. Д.Ж.Жанаева»*

Гипотеза: я предполагаю, что метод математической индукции можно использовать при решении различных задач.

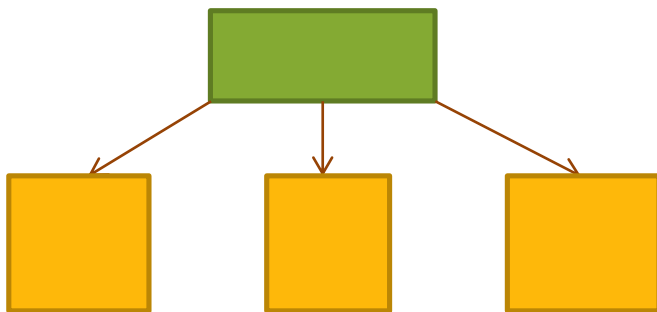
Цель работы: познакомиться с методом математической индукции, систематизировать знания по данной теме и применить их при решении математических задач и доказательстве теорем, обосновать и наглядно показать практическое значение метода математической индукции как необходимого фактора для решения задач.

Задачи работы: проанализировать литературу по данной теме; освоить разные методы и методики работы; обобщить и систематизировать знания по данной теме; совершенствовать знания, умения, навыки по данной теме; развивать творческий подход к решению задач; прорешать задачи различных видов, применяя данный метод; предоставить выводы по данной теме; сформировать представления о математике как части общечеловеческой культуры, понимать значимость математики.

Основа математического исследования

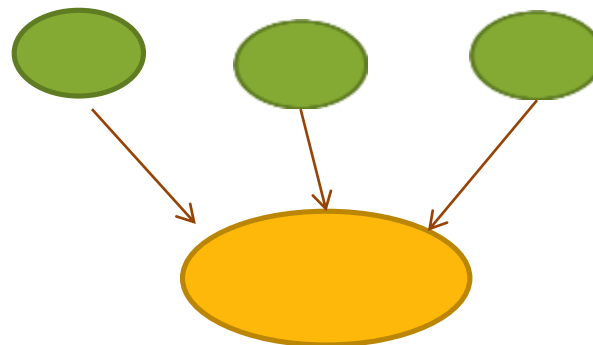
Дедуктивный метод

Дедуктивный метод – это рассуждение, исходным моментом которого является общее утверждение, а заключительным – частный результат.



Индуктивный метод

Индуктивный метод – это рассуждение, при котором, опираясь на ряд частных результатов приходят к одному общему выводу.





Паскаль



Декарт



Бернулли

Этапы решения задач методом математической индукции

1. **Базис индукции.** Проверяют справедливость утверждения для наименьшего из натуральных чисел, при котором утверждение имеет смысл.
2. **Индукционное предположение.** Предполагаем, что утверждение верно для некоторого значения k .
3. **Индукционный переход.** Доказываем, что утверждение справедливо для $k+1$.
4. **Вывод.** Если такое доказательство удалось довести до конца, то, на основе принципа математической индукции можно утверждать, что утверждение верно для любого натурального числа n .



Применение метода математической индукции в задачах на суммирование

Доказать формулу $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ $n \in \mathbb{N}$

1) При $n=1$ обе части равенства обращаются в единицу. Следовательно, первое условие принципа математической индукции выполнено.

2) Предположим, что формула верна при $n=k$, т.е.

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + k^3 = \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2$$

3) Прибавим к обеим частям этого равенства $(k+1)^3$ и преобразуем правую часть. Тогда получим

$$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + k^3 + (k+1)^3 &= \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2 + (k+1)^3 = \\ &= (k+1)^2 \left(\frac{k^2}{4} + k + 1\right) = \left(\frac{k+1}{2}\right)^2 (k^2 + 4k + 4) = \left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

4) Это утверждение справедливо при любом натуральном значении n .

Применение метода математической индукции в задачах на делимость

Доказать, что $(11^{n+2}+12^{2n+1})$ кратно 133.

Доказательство:

1) При $n=1$. $11^3+12^3=(11+12)(11^3-132+12^3)=23 \cdot 133$.

Так как $(23 \cdot 133)$ кратно 133, то и (11^3+12^3) кратно 133.

2) Пусть при $n=k$ $(11^{k+2}+12^{2k+1})$ кратно 133.

3) При $n=k+1$. Докажем, что $(11^{k+3}+12^{2k+3})$ кратно 133.

$$11^{k+3}+12^{2k+3}=11 \cdot 11^{k+2}+12^2 \cdot 12^{2k+1}=11(11^{k+2}+12^{2k+1})+133 \cdot 12^{2k+1}$$

В данном выражении второе слагаемое кратно 133, а первое слагаемое кратно 133 из второго пункта. Тогда по свойству делимости полученная сумма кратна 133.

4) Значит $(11^{n+2}+12^{2n+1})$ кратно 133, что и требовалось доказать.

Применение метода математической индукции для доказательства неравенств

Доказать, что при $n \geq 2$ справедливо неравенство

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}.$$

Доказательство:

1) При $n=2$. Это неравенство $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} < 2\sqrt{2}$ верно, так как правая часть явно больше 2, а левая меньше 2.

2) Пусть при $n=k$ данное неравенство верно, т.е. $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{k}$.

3) Докажем что при $n=k+1$ неравенство верно.

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} < 2\sqrt{k+1}. \quad \Rightarrow \quad 2\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} < 2\sqrt{k+1}$$

Рассмотрим разность правой и левой частей неравенства.

$$2\sqrt{k+1} - \left(2\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right) = \frac{2k + 2 - 2\sqrt{k+1}\sqrt{k} - 1}{\sqrt{k+1}} =$$

$$= \frac{k + 1 - 2\sqrt{k+1}\sqrt{k} + k}{\sqrt{k+1}} = \frac{(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})^2}{\sqrt{k+1}},$$

Полученное выражение положительно, значит неравенство

$$2\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} < 2\sqrt{k+1} \quad \text{верно.}$$

4) Делаем вывод, что неравенство верно при любом натуральном значении n . Что и требовалось доказать

Применение метода математической индукции при решении олимпиадных задач

Докажите тождество $\cos 2a \cdot \cos 4a \cdot \dots \cdot \cos 2^na = \frac{\sin 2^{n+1}a}{2^n \sin 2a}$

Доказательство:

1) Если $n=1$, то $\frac{\sin 2^2 a}{2 \sin 2a} = \frac{\sin 4a}{2 \sin 2a} = \frac{2 \sin 2a \cos 2a}{2 \sin 2a} = \cos 2a$. Верно.

2) Пусть для $n=k$ данное тождество верно, т.е.

$$\cos 2a \cdot \cos 4a \cdot \dots \cdot \cos 2^k a = \frac{\sin 2^{k+1} a}{2^k \sin 2a}$$

3) Докажем, что при $n=k+1$ данное тождество верно.

$$\begin{aligned} \cos 2a \cdot \cos 4a \cdot \dots \cdot \cos 2^k a \cdot \cos 2^{k+1} a &= \frac{\sin 2^{k+1} a}{2^k \sin 2a} \cdot \cos 2^{k+1} a = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \sin 2^{k+1} a}{2^k \sin 2a} \cdot \cos 2^{k+1} a = \frac{1}{2} \frac{\sin(2 \cdot 2^{k+1} a)}{2^k \sin 2a} = \frac{\sin(2^{k+2} a)}{2^{k+1} \sin 2a} \end{aligned}$$

4) Тождество верно для любого натурального значения переменной n .

Заключение

- ❑ я узнал, чтобы решать задачи методом математической индукции нужно знать и понимать основной принцип математической индукции;
- ❑ достоинством метода математической индукции является его универсальность, так как с помощью этого метода можно решить многие задачи;
- ❑ обобщив и систематизировав знания по математической индукции, я убедился в необходимости знаний по теме «Метод математической индукции». Кроме того эти знания повышают интерес к математике, как к науке;
- ❑ так же в ходе работы приобрел навыки решения задач по использованию метода математической индукции. Считаю, что эти навыки помогут мне в будущем.

Список литературы

1. Баранова И.В., Ляпин С.Е. Задачи на доказательство по алгебре, редактор Барковский И.В. Техн. Редактор Кирнарская А.А. Корректоры: Морозов А.А. и Дешалыт Н.Г. Уч. изд. л. Типография №3 7,67. 1954.-159с.
2. Виленкин Н.Я., Ивашев-Мусатов О.С., Шварцбурд С.И. Алгебра и математический анализ, 10 класс: Учеб. пособие для учащихся шк. и классов с углуб. изуч. математики – 4-е изд. М.: Просвещение, 1995.-288 с.: ил. - ISBN 5-09-006565-9.
3. Гайштут А.Г., Ушаков Р.П. Сборник задач по математике с примерами решений: Для учащихся общеобразов. шк. лицеев и гимназий – К.: А.С.К., 2002.-592 с.: ил.; ISBN 966-539-343-X.
4. Шарыгин И.Ф. Факультативный курс по математике: Решение задач: Учеб. пособие для 10 кл. сред. шк.- М.: Просвещение, 1989.-252 с.: ил. ISBN 5-09-001288-1.
5. Шипачев В.С. Основы высшей математики: Учеб. Пособие для втузов / Под ред. Акад. А.Н. Тихонова.-М.: Высш. Шк., 1989.-479с.: ил. ISBN5-06-000048-6.

Спасибо за внимание

