

Министерство образования и науки Республики Бурятия
МАОУ «Хоринская СОШ №1 имени Д.Ж.Жанаева»

Тема: «Метод математической индукции»

Секция: алгебра

Выполнил: Ширапов Булат, ученик 11Б класса
МАОУ «ХСОШ №1 им. Д.Ж.Жанаева»

Руководитель: С.Г.Садовская, учитель
математики МАОУ «ХСОШ №1 им. Д.Ж.Жанаева»

2022 год

Оглавление

Введение	3
Часть I	4
§1 Истории возникновения и развития метода математической индукции	
§2 Этапы решения задач методом математической индукции	5
Часть II	
§ 1 Применение метода математической индукции в задачах на суммирование	6
§2 Применение метода математической индукции в задачах на делимость	6
§3 Применение метода математической индукции для доказательства неравенств	7
§4 Применение метода математической индукции при решении олимпиадных задач	8
Заключение	10
Список литературы	11

Введение

*«Понимание и умение правильно применять принцип математической индукции, является хорошим критерием логической зрелости, которая совершенно необходима математику»
А.Н. Колмогоров.*

Одной из отличительных черт математики является дедуктивное построение теории. Но дедукция не является единственным методом научного мышления. В экспериментальных науках велика роль индуктивных выводов. В математике индукция часто позволяет угадать формулировку теорем, а в ряде случаев и наметить пути доказательств.

Для исследования я выбрал тему «Метод математической индукции», т. к. в школьной программе с методом математической индукции знакомятся только поверхностно. В то время как подробное знакомство с этим методом полезно учащимся не только из-за расширения их кругозора, но также и потому, что на его принципе основано решение многих задач (включая олимпиадные). Мною был изучен принцип математической индукции, а также его широкое применение в решении задач на суммирование, доказательстве тождеств, доказательстве и решении неравенств (в частности неравенства Бернулли), решении вопроса делимости, при изучении свойств числовых последовательностей.

Гипотеза: я предполагаю, что метод математической индукции можно использовать при решении различных задач.

Цель работы: познакомиться с методом математической индукции, систематизировать знания по данной теме и применить их при решении математических задач и доказательстве теорем, обосновать и наглядно показать практическое значение метода математической индукции как необходимого фактора для решения задач.

Задачи работы: проанализировать литературу по данной теме; освоить разные методы и методики работы; обобщить и систематизировать знания по данной теме; совершенствовать знания, умения, навыки по данной теме; развивать творческий подход к решению задач; прорешать задачи различных видов, применяя данный метод; предоставить выводы по данной теме; сформировать представления о математике как части общечеловеческой культуры, понимать значимость математики.

Объект исследования: метод математической индукции.

Предмет исследования: решение различных задач с использованием данного метода.

Методы и методики исследования, используемые в работе: анализ математической литературы и ресурсов Интернета по данной теме; продуктивное воспроизведение изученного материала; познавательно-поисковая деятельность; анализ и сравнение данных в поиске решения задач; постановка гипотез и их проверка; сравнение и обобщение математических фактов; решение задач различных видов; анализ полученных результатов.

Часть I

§1 Истории возникновения и развития метода математической индукции

Чрезвычайное расширение предмета математики привлекло в XIX веке усиленное внимание к вопросам ее «обоснования», т.е. критического пересмотра ее исходных положений (аксиом), построения строгой системы определений и доказательств, а также критического рассмотрения логических примеров, употребляемых при этих доказательствах.

Только к концу XIX века сложился стандарт требований к логической строгости, остающейся и до настоящего времени господствующими в практической работе математиков над развитием отдельных математических теорий.

Современная математическая логика дала на этот вопрос, определенный ответ: *никакая единая дедуктивная теория не может исчерпать разнообразия проблем теории чисел.*

Слово индукция по-русски означает наведение, а индуктивными называют выводы, сделанные на основе наблюдений, опытов, т.е. полученные путем заключения от частного к общему.

В основе всякого математического исследования лежат дедуктивный и индуктивный методы. Дедуктивный метод рассуждений - это рассуждение от общего к частному, т.е. рассуждение, исходным моментом которого является общий результат, а заключительным моментом – частный результат. Индукция применяется при переходе от частных результатов к общим, т.е. является методом, противоположным дедуктивному.

Метод математической индукции можно сравнить с прогрессом. Мы начинаем с низшего, в результате логического мышления приходим к высшему. Человек всегда стремился к прогрессу, к умению развивать свою мысль логически, а значит, сама природа предначертала ему размышлять индуктивно.

В математике роль индукции в значительной степени состоит в том, что она лежит в основе выбираемой аксиоматики. После того как длительная практика показала, что прямой путь всегда короче кривого или ломанного, естественно было сформулировать аксиому: для любых трех точек A, B и C выполняется неравенство $|AB| + |BC| \geq |AC|$.

Лежащее в основе арифметики понятие «следовать за» тоже появилось при наблюдениях за строем солдат, кораблей и другими упорядоченными множествами.

Не следует, однако, думать, что этим исчерпывается роль индукции в математике. Разумеется, мы не должны экспериментально проверять теоремы, логически выведенные из аксиом: если при выводе не было сделано логических ошибок, то они постольку верны, поскольку истинны принятые нами аксиомы. Но из данной системы аксиом можно вывести очень много утверждений. И отбор тех утверждений, которые надо доказывать, вновь подсказывается индукцией. Именно она позволяет отделить полезные теоремы от

бесполезных, указывает, какие теоремы могут оказаться верными, и даже помогает наметить путь доказательства.

В математике уже издавна используется индуктивный метод, основанный на том, что то или иное общее утверждение делается на основании рассмотрения лишь нескольких частных случаев. История, например, сохранила следующее высказывание Эйлера: «У меня нет для доказательства никаких других доводов, за исключением длинной индукции, которую я провел так далеко, что никоим образом не могу сомневаться в законе, управляющем образованием этих членов. И кажется невозможным, чтобы закон, который, как было обнаружено, выполняется, например, для 20 членов, нельзя было бы наблюдать и для следующих».

Веря в непогрешимость индукции, ученые иногда допускали грубые ошибки.

К середине семнадцатого столетия в математике накопилось немало ошибочных выводов. Стала сильно ощущаться потребность в научно обоснованном методе, который позволял бы делать общие выводы на основании рассмотрения нескольких частных случаев. И такой метод был разработан. Основная заслуга в этом принадлежит французским математикам Паскалю (1623 - 1662) и Декарту, а также швейцарскому математику Якобу Бернулли (1654-1705).

Осознание метода математической индукции как отдельного важного метода восходит к Блезу Паскалю и Гертранду, хотя отдельные случаи применения встречаются ещё в античные времена у Прокла и Евклида. Современное название метода было введено де Морганом в 1838 году.

§2 Этапы решения задач методом математической индукции

В математических олимпиадах часто встречаются достаточно трудные задачи на доказательство делимости натуральных чисел. Перед школьниками возникает проблема: как найти универсальный математический метод, позволяющий решать подобные задачи?

Оказывается, большинство задач на доказательство делимости можно решать методом математической индукции. Метод математической индукции встречается в теории чисел. На заре теории чисел математики открыли многие факты индуктивным путем: Л. Эйлер и К. Гаусс рассматривали подчас тысячи примеров, прежде чем подметить числовую закономерность и поверить в нее. Но одновременно они понимали, сколь обманчивыми могут быть гипотезы, прошедшие «конечную» проверку. Для индуктивного перехода от утверждения, проверенного для конечного подмножества, к аналогичному утверждению для всего бесконечного множества необходимо доказательство. Такой способ предложил Блез Паскаль, который нашел общий алгоритм для нахождения признаков делимости любого целого числа на любое другое целое число (трактат «О характере делимости чисел»).

Метод математической индукции используется, чтобы доказать путем рассуждений истинность некоего утверждения для всех натуральных чисел или истинность утверждения начиная с некоторого числа n .

Решение задач на доказательство истинности некоторого утверждения методом математической индукции состоит из четырех этапов:



1. **Базис индукции.** Проверяют справедливость утверждения для наименьшего из натуральных чисел, при котором утверждение имеет смысл.
2. **Индукционное предположение.** Предполагаем, что утверждение верно для некоторого значения k .
3. **Индукционный переход.** Доказываем, что утверждение справедливо для $k+1$.
4. **Вывод.** Если такое доказательство удалось довести до конца, то, на основе принципа математической индукции можно утверждать, что утверждение верно для любого натурального числа n .

Часть II

§ 1 Применение метода математической индукции в задачах на суммирование

Пример №1.1 Доказать формулу $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$, $n \in N$.

- 1) При $n = 1$ обе части равенства обращаются в единицу и, следовательно, первое условие принципа математической индукции выполнено.
- 2) Предположим, что формула верна при $n = k$, т.е. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + k^3 = \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2$.
- 3) Прибавим к обеим частям этого равенства $(k+1)^3$ и преобразуем правую часть. Тогда получим $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + k^3 + (k+1)^3 = \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2 + (k+1)^3 = (k+1)^2 \left(\frac{k^2}{4} + k + 1\right) = \left(\frac{k+1}{2}\right)^2 (k^2 + 4k + 4) = \left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)^2$.
- 4) Таким образом, из того, что формула верна при $n = k$, следует, что она верна и при $n = k+1$. Это утверждение справедливо при любом натуральном значении k . Итак, второе условие принципа математической индукции тоже выполнено. Формула доказана.

Пример №1.2 Доказать формулу $\frac{1 \cdot 2^1}{3!} + \frac{2 \cdot 2^2}{4!} + \frac{3 \cdot 2^3}{5!} + \dots + \frac{n \cdot 2^n}{(n+2)!} = 1 - \frac{2^{n+1}}{(n+2)!}$

- 1) При $n = 1$ обе части равенства обращаются в $\frac{1}{3}$ - ю и, следовательно, первое условие принципа математической индукции выполнено.
- 2) Предположим, что формула верна при $n = k$, т.е. $\frac{1 \cdot 2^1}{3!} + \frac{2 \cdot 2^2}{4!} + \frac{3 \cdot 2^3}{5!} + \dots + \frac{k \cdot 2^k}{(k+2)!} = 1 - \frac{2^{k+1}}{(k+2)!}$.
- 3) Докажем теперь для $k+1$: $\frac{1 \cdot 2^1}{3!} + \frac{2 \cdot 2^2}{4!} + \frac{3 \cdot 2^3}{5!} + \dots + \frac{k \cdot 2^k}{(k+2)!} + \frac{(k+1) \cdot 2^{k+1}}{(k+3)!} = 1 - \frac{2^{k+2}}{(k+3)!}$

$1 - \frac{2^{k+1}}{(k+2)!} + \frac{(k+1)2^{k+1}}{(k+3)!} = 1 - \frac{2^{k+2}}{(k+3)!}$; $\frac{(k+1)2^{k+1}}{(k+2)!(k+3)} + \frac{2^{k+2}}{(k+2)!(k+3)} = \frac{2^{k+1}}{(k+2)!}$;
 $(k+1) \cdot 2^{k+1} + 2 \cdot 2^{k+1} = 2^{k+1}(k+3)$; $2^{k+1}(k+3) = 2^{k+1}(k+3)$, что и требовалось доказать.

4) Следовательно, на основании метода математической индукции делаем вывод, что данная формула верна для любого натурального числа n .

§2 Применение метода математической индукции в задачах на делимость

Пример №2.1 Доказать, что $(7^{n+1}+8^{2n-1}):19$

1) $n=1$; $7^{2+1}+8^{2 \cdot 1-1}=57:19$ -верно;

2) $n=k$; $7^{k+1}+8^{2k-1}$ – верно;

3) $n=k+1$; Доказать $(7^{k+2}+8^{2k+1}):19$;

$7^{k+2}+8^{2k+1}=7^{k+1} \cdot 7 + 8^{2k-1} \cdot 8^2 = 7^{k+1} \cdot 7 + 8^{2k-1} \cdot 64 = 7^{k+1} \cdot 7 + 8^{2k-1} \cdot 57 + 8^{2k-1} \cdot 7 = 7 \cdot (7^{k+1} + 8^{2k-1}) + 8^{2k-1} \cdot 57$, что кратно 19.

4) Значит и исходное выражение $(7^{n+1}+8^{2n-1})$ кратно 19, что и требовалось доказать.

Пример №2.2. Доказать, что $(11^{n+2}+12^{2n+1})$ кратно 133.

1) При $n=1$, $11^3+12^3=(11+12)(11^3-12^3)=23 \cdot 133$. Так как $(23 \cdot 133)$ кратно 133, то и (11^3+12^3) кратно 133.

2) При $n=k$, $(11^{k+2}+12^{2k+1})$ кратно 133.

3) При $n=k+1$. Доказать, что $(11^{k+3}+12^{2k+3})$ кратно 133.

$11^{k+3}+12^{2k+3}=11 \cdot 11^{k+2}+12^2 \cdot 12^{2k+1}=11(11^{k+2}+12^{2k+1})+133 \cdot 12^{2k+1}$. В данном выражении второе слагаемое кратно 133, а первое слагаемое кратно 133 из второго пункта. Тогда по свойству делимости полученная сумма кратна 133, значит $(11^{n+2}+12^{2n+1})$ кратно 133, что и требовалось доказать.

§3 Применение метода математической индукции для доказательства неравенств

Пример № 3.1 (неравенство Бернулли) Доказать, что при $x > 0$ и натуральном n , большем 1, справедливо неравенство $(1+x)^n > 1+nx$ (неравенство Бернулли).

1) При $n=2$ имеем $(1+x)^2 = 1+2x+x^2 > 1+2x$, так как $x > 0$, значит, неравенство справедливо.

2) Допустим, что $(1+x)^k > 1+kx$, (1) и докажем, что тогда $(1+x)^{k+1} > 1+(1+k)x$.

3) Для доказательства умножим обе части неравенства (1) на $1+x > 0$, получим:

$(1+x)^{k+1} > (1+kx)(1+x)$, или $(1+x)^{k+1} > 1+(1+k)x+kx^2$, или $(1+x)^{k+1} > 1+(1+k)x$. Так как $kx^2 > 0$.

4) Значит, $(1+x)^n > 1+nx$ при любом натуральном n , большем 1, и $x > 0$.

Пример № 3.2 Доказать, что при $n \geq 2$ справедливо неравенство

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}.$$

1) При $n=2$.

Это неравенство $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} < 2\sqrt{2}$ верно, так как правая часть явно больше 2, а левая меньше 2.

2) При $n=k$.

Верно.

3) При $n=k+1$. Доказать: $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} < 2\sqrt{k+1}$.

Прибавим к обеим частям неравенства $\frac{1}{\sqrt{k+1}}$ и получим:

$$2\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} < 2\sqrt{k+1}.$$

Рассмотрим разность правой и левой части неравенства $2\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} < 2\sqrt{k+1}$.

$$\begin{aligned} 2\sqrt{k+1} - \left(2\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right) &= \frac{2k+2-2\sqrt{k+1}\sqrt{k}-1}{\sqrt{k+1}} = \\ &= \frac{k+1-2\sqrt{k+1}\sqrt{k}+k}{\sqrt{k+1}} = \frac{(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})^2}{\sqrt{k+1}}. \end{aligned}$$

Полученное выражение положительно, значит неравенство $2\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} < 2\sqrt{k+1}$ верно, а поэтому верно $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} < 2\sqrt{k+1}$ неравенство, что и требовалось доказать.

§4 Применение метода математической индукции при решении олимпиадных задач

Пример №4.1. Доказать, что при любом натуральном $n > 1$ число $2^{2^n} + 1$ оканчивается цифрой 7.

1) Если $n=2$, то $2^{2^2} + 1 = 2^4 + 1 = 16 + 1 = 17$. Верно.

2) Пусть для $n=k$ данное утверждение верно, следовательно $2^{2^k} + 1$ оканчивается цифрой 7.

Тогда $2^{2^k} + 1 = 10m + 7$, где m - некоторое натуральное число. Из этого равенства получим, что $2^{2^k} = 10m + 6$.

3) Докажем, что для $n=k+1$ данное утверждение верно. $2^{2^{k+1}} + 1 = 2^{2^k \cdot 2} + 1 = (2^{2^k})^2 + 1 = (10m + 6)^2 + 1 = 100m^2 + 120m + 37$. Получили, что действительно данное число оканчивается цифрой 7.

4) Можно сделать вывод, что при любом натуральном $n > 1$ число $2^{2^n} + 1$ оканчивается цифрой 7.

Пример №4.2. Докажите тождество $\cos 2a \cdot \cos 4a \cdot \dots \cdot \cos 2^n a = \frac{\sin 2^{n+1} a}{2^n \sin 2a}$

1) Если $n=1$, то $\cos 2a = \frac{\sin 2^2 a}{2 \sin 2a} = \frac{\sin 4a}{2 \sin 2a} = \frac{2 \sin 2a \cos 2a}{2 \sin 2a} = \cos 2a$. Верно.

2) Пусть для $n=k$ данное тождество верно, т.е. $\cos 2a \cdot \cos 4a \cdot \dots \cdot \cos 2^k a = \frac{\sin 2^{k+1} a}{2^k \sin 2a}$

3) Докажем, что при $n=k+1$ данное тождество верно.

$$\begin{aligned} \cos 2a \cdot \cos 4a \cdot \dots \cdot \cos 2^k a \cdot \cos 2^{k+1} a &= \frac{\sin 2^{k+1} a}{2^k \sin 2a} \cdot \cos 2^{k+1} a = \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \sin 2^{k+1} a}{2^k \sin 2a} \cdot \cos 2^{k+1} a = \\ &= \frac{1}{2} \frac{\sin(2 \cdot 2^{k+1} a)}{2^k \sin 2a} = \frac{\sin(2^{k+2} a)}{2^{k+1} \sin 2a}. \text{ Тождество доказано.} \end{aligned}$$

4) Можно сделать вывод, что тождество верно при любом значении n .

Пример №4.3. Доказать, что если $k \in \mathbb{N}$, то число $k^2 - k$ - четное.

1) Проверим базу индукции - при $k = 1$, $k^2 - k = 0$ - число четное.

2) Допустим при некотором $k = n$, число $n^2 - n$ - четное.

3) Докажем, что $k = n+1$ число $(n+1)^2 - (n+1)$ - тоже четное. Но $(n+1)^2 - (n+1) = n^2 + 2n + 1 - n - 1 = n^2 + n = n^2 - n + 2n$. Число $n^2 - n$ - четное, согласно предположению и $2n$ - четное. Сумма четных чисел - четная.

4) Вывод: если $k \in \mathbb{N}$, то число $k^2 - k$ - четное.

Заключение

В ходе проделанной работы мною был изучен метод математической индукции. Были систематизированы знания по теме, применён данный метод при решении математических задач, обосновано и наглядно показано практическое значение метода математической индукции.

Так как метод математической индукции – это особый метод математического доказательства, который позволяет на основании частных наблюдений делать заключения о соответствующих общих закономерностях, и этот метод проще всего уяснить на примерах, то с этой целью в работе были рассмотрены примеры.

Знакомясь с методом математической индукции, я изучал специальную литературу, консультировался с педагогом, анализировал данные и решения задач, пользовался ресурсами Интернета, выполнял необходимые вычисления.

Вывод:

- я узнал, чтобы решать задачи методом математической индукции нужно знать и понимать основной принцип математической индукции;
- достоинством метода математической индукции является его универсальность, так как с помощью этого метода можно решить многие задачи;
- обобщив и систематизировав знания по математической индукции, я убедился в необходимости знаний по теме «Метод математической индукции». Кроме того эти знания повышают интерес к математике, как к науке;
- так же в ходе работы приобрел навыки решения задач по использованию метода математической индукции. Считаю, что эти навыки помогут мне в будущем.

Работа над данной темой важна для продолжения моего образования. Материал данной работы может быть использован для занятий математического кружка и научного общества учащихся.

Список литературы

1. Баранова И.В., Ляпин С.Е. Задачи на доказательство по алгебре, редактор Барковский И.В. Техн. Редактор Кирнарская А.А. Корректоры: Морозов А.А. и Дешалыт Н.Г. Уч. изд. л. Типография №3 7,67. 1954.-159с.
2. Виленкин Н.Я., Ивашев-Мусатов О.С., Шварцбурд С.И. Алгебра и математический анализ, 10 класс: Учеб. пособие для учащихся шк. и классов с углуб. изуч. математики – 4-е изд. М.: Просвещение, 1995.-288 с.: ил. - ISBN 5-09-006565-9.
3. Гайштут А.Г., Ушаков Р.П. Сборник задач по математике с примерами решений: Для учащихся общеобразов. шк. лицеев и гимназий – К.: А.С.К., 2002.-592 с.: ил.; ISBN 966-539-343-X.
4. Шарыгин И.Ф. Факультативный курс по математике: Решение задач: Учеб. пособие для 10 кл. сред. шк.- М.: Просвещение, 1989.-252 с.: ил. ISBN 5-09-001288-1.
5. Шипачев В.С. Основы высшей математики: Учеб. Пособие для втузов / Под ред. Акад. А.Н. Тихонова.-М.: Высш. Шк., 1989.-479с.: ил. ISBN5-06-000048-6.

