Определение:

Ряды Тейлора — разложение функции в бесконечную сумму степенных функций.

Ряды Тейлора применяются при аппроксимации функции многочленами. В частности, линеаризация уравнений происходит путём разложения в ряд Тейлора и отсечения всех членов выше первого порядка.

С помощью ряда Тейлора любую функцию $f(x)$ можно представить в виде суммы бесконечного числа простых одночленов:

$$f(x) = a_0 \times x^0 + a_1 \cdot x^1 + a_2 \times x^2 + a_3 \times x^3 + a_4 \times x^4 + \ldots$$

Здесь, $\{a_k; k \in N\}$ —множеством числовых коэффициент своих для каждой функции.

Ряды Тейлора для элементарных функций:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} x^n$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{(1-2n)n!^2\, 4^n} x^n$$

$$sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$tg(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n}(-4)^n(1-4^n)}{(2n)!} x^{2n-1}$$

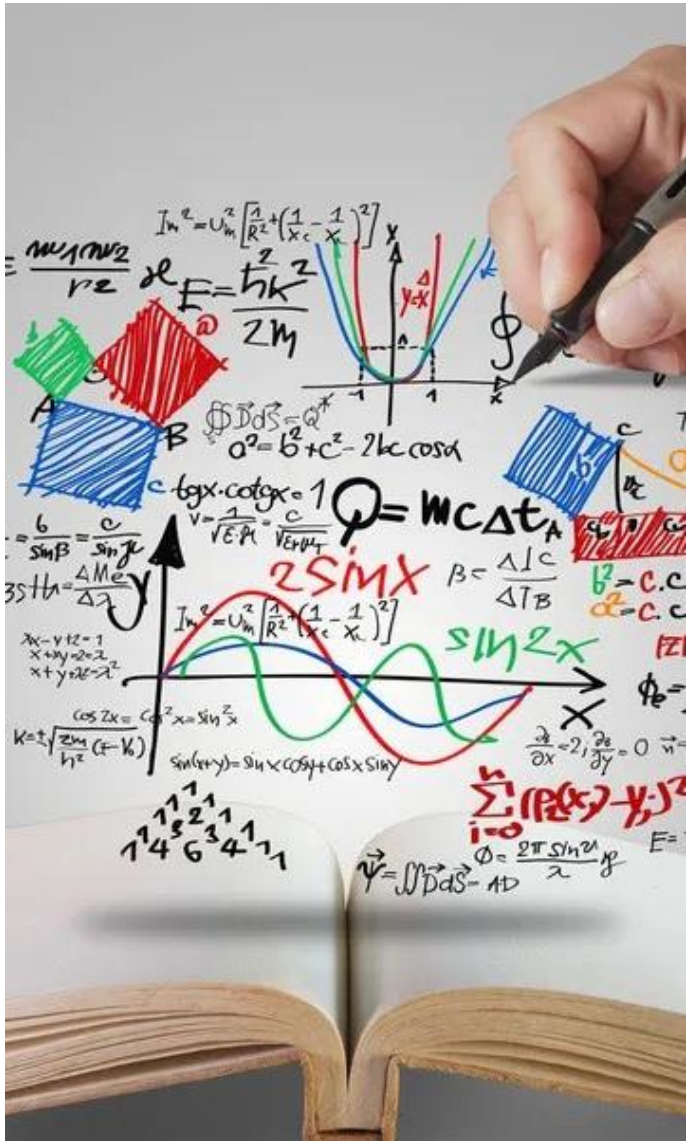
$$ctg(x) = \frac{1}{x} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n} B_{2n}}{(2n)!} x^{2n}$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)}$$

(Аргументы функций $sin(x), cos(x), tg(x), ctg(x)$ —измеряются в радианах,
1 рад.$\approx 57°$)

Применение рядов Тейлора для приближённого вычисления значений функций и приближённого решения уравнений



План аппроксимации функции рядом Тейлора:

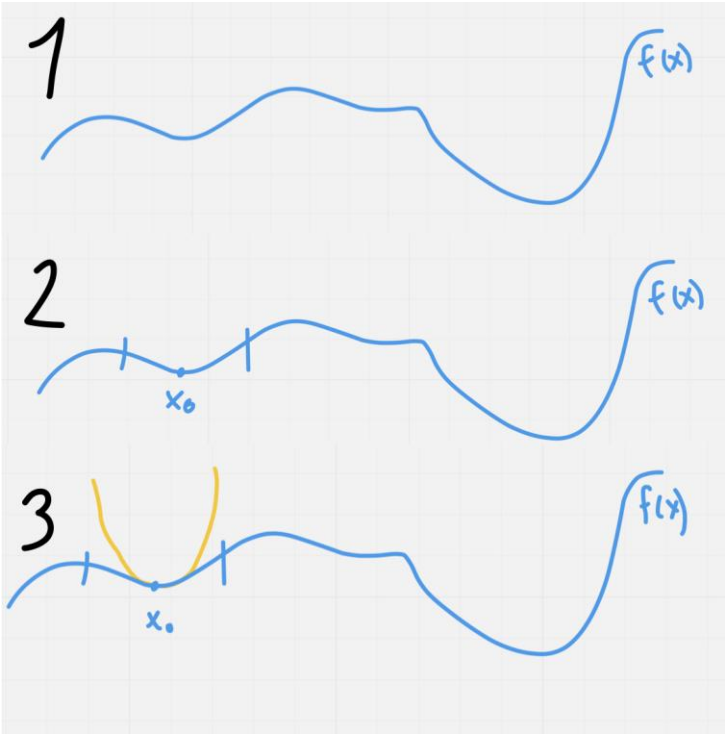
1) Берём интересующую нас функцию $f(x)$: (См. рис. 1)

2) Выбираем в близи какой точки x_0 мы хотим работать:(См. рис. 2)

3) Решаем какой вид приближённого выражения лучше аппроксимирует $f(x)$ в близи точки x_0 :(См. рис. 3)

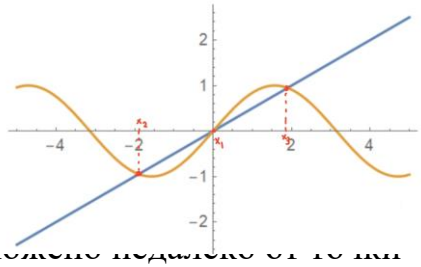
4) Тождественными преобразованиями приводим функцию к виду пригодному для разложения.

5) раскладываем получившиеся (идентичные шаблону по форме) элементы функции в ряды Тэйлора используя таблицу и выписывая только слагаемые, согласующиеся с пунктом 3.



Примеры:

1) $\frac{x}{2} = sin(x)$



Изобразим обе ф

Первый корень н

$x_1 = 0$

Так как x_2 распо

-2 то пусть: $x_2 = -2 + z$, где $|z| < 1$,

тогда приведём функции к виду удобному для применения рядов Тейлора:

$$\frac{-2+z}{2} = sin(-2+z)$$

$$\frac{-2+z}{2} = sin(-2) \cdot cos(z) + cos(-2) \cdot sin(z)$$

Заменим функции $sin(z)$ и $cos(z)$ на соответствующие им ряды:

$$\frac{-2+z}{2} = a \cdot (1 - \frac{z^2}{2!} + \dots) + b \cdot (z - \dots)$$

Здесь: $a = sin(-2); b = cos(-2)$

Нас не интересует слишком точный ответ по этому ограничимся слагаемыми не выше первой степени:

$$\frac{-2+z}{2} = a \cdot 1 + b \cdot z$$

$$z = -\frac{2 \cdot sin(-2) + 2}{2 \cdot cos(-2) - 1} = -0{,}099$$

Отсюда получаем $x_2 = -2{,}099$

Аналогично пусть $x_3 = 2 + y$, $|y| < 1$,

тогда $x_3 = 1{,}9009956$

$$2)\sqrt{10} = \sqrt{9+1} = \sqrt{9 \cdot (1+\tfrac{1}{9})} = 3\sqrt{1+\tfrac{1}{9}} =$$

$$= 3 \cdot (1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \dots) \approx 3 \cdot (1 + \frac{\frac{1}{9}}{2} - \frac{(\frac{1}{9})^2}{8}) =$$

$$= 3 \cdot (1 + \frac{1}{18} - \frac{\frac{1}{81}}{8}) = 3 \cdot (1 + \frac{1}{18} - \frac{1}{648}) =$$

$$= 3 + \frac{1}{6} - \frac{1}{216} = 3 + \frac{36}{216} - \frac{1}{216} = 3\frac{35}{216} \approx 3{,}162037$$

Здесь:

$$x = \frac{1}{9}$$

Чем больше слагаемых ряда Тейлора мы оставим, тем более точным будет наш ответ. Продемонстрируем это ниже в сравнении строчным ответом:

$$\sqrt{10} = 3{,}16228$$

$$3 \cdot 1 = 3$$

$$3 \cdot (1 + \frac{\frac{1}{9}}{2}) = 3\frac{1}{6} \approx 3{,}166667$$

$$3 \cdot (1 + \frac{\frac{1}{9}}{2} - \frac{(\frac{1}{9})^2}{8}) = 3{,}162037$$