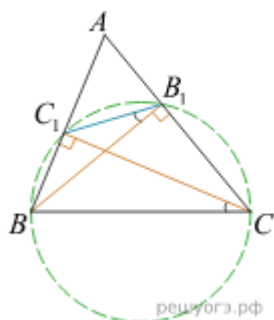


Консультативный аспект на тему «Доказательство элементов геометрических фигур на плоскости в задачах 24 ОГЭ по математике»

Задача 1. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты BB_1 и CC_1 .

Докажите, что углы BB_1C_1 и BCC_1 равны.

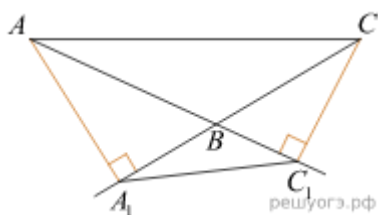


Решение.

Треугольники CB_1B и CC_1B имеют общую гипотенузу BC . Поэтому точки C, B, C_1, B_1 лежат на одной окружности. $\angle BB_1C_1$ и $\angle BCC_1$ опираются на одну дугу, и поэтому равны. Ч.т.д.

Задача 2. В треугольнике ABC с тупым углом ABC проведены высоты AA_1 и CC_1 . Докажите, что треугольники A_1BC_1 и ABC подобны.

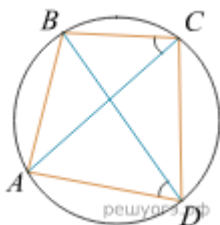
Решение.



Поскольку $\angle ABC$ тупой, основания высот будут лежать на продолжениях сторон. Так как диагонали четырёхугольника AA_1C_1C пересекаются, он выпуклый, а поскольку $\angle AA_1C = \angle AC_1C = 90^\circ$, около него можно описать окружность. Тогда $\angle AC_1A_1 = \angle ACA_1$ как вписанные углы, опирающиеся на дугу AA_1 , а $\angle CA_1C_1 = \angle CAC_1$ как вписанные углы, опирающиеся на дугу CC_1 . Значит, указанные треугольники подобны по двум углам. Ч.т.д.

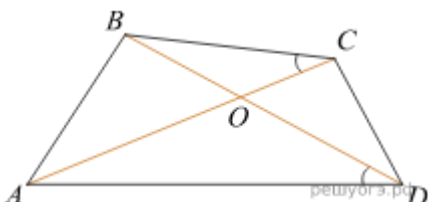
Задача 3. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ углы BCA и BDA равны. Докажите, что углы ABD и ACD также равны.

Решение.



Вспользуемся теоремой: если отрезок AB виден из точек C и D , лежащих по одну сторону от прямой AB , под одним и тем же углом, то точки A, B, C, D лежат на одной окружности (см. рис.). А тогда $\angle ABD = \angle ACD$ как вписанные углы, опирающиеся на одну дугу AD . Что и требовалось доказать.

Другой способ решения.



Проведём построения и введём обозначения, как показано на рисунке.

Рассмотрим треугольники BOC и AOD ,

$\angle BCA = \angle BDA$ по условию,

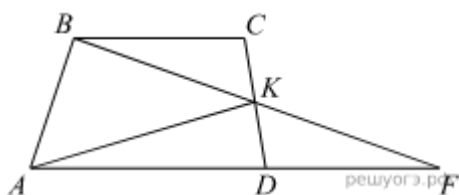
$\angle BOC = \angle AOD$ как вертикальные,
следовательно, треугольники BOC и AOD подобны.

Откуда $\frac{AO}{OB} = \frac{OD}{OC} = \frac{AD}{BC}$. Равенство $\frac{AO}{OB} = \frac{OD}{OC}$ можно представить в виде $\frac{AO}{OD} = \frac{OB}{OC}$.

Рассмотрим треугольники ABO и COB , $\angle AOB = \angle COB$ как вертикальные и имеется равенство $\frac{AO}{OD} = \frac{OB}{OC}$, следовательно, треугольники подобны. Поэтому углы ABD и ACD равны. ч.т.д.

Задача 4. Точка K — середина боковой стороны CD трапеции $ABCD$. Докажите, что площадь треугольника KAB равна половине площади трапеции. (Точка K — середина боковой стороны CD трапеции $ABCD$. Докажите, что площадь треугольника KAB равна сумме площадей треугольников BCK и ADK .)

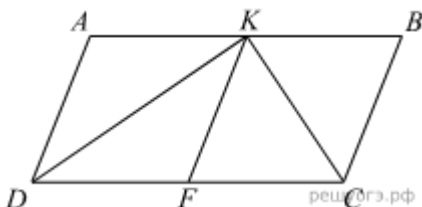
Решение.



Продолжим BK до пересечения с прямой AD в точке F . Заметим, что в треугольниках FDK и BCK стороны CK и DK равны по условию, углы при вершине K равны как вертикальные, а углы KDF и KCB равны как накрест лежащие. Значит, треугольники FDK и BCK равны.

Следовательно, их площади равны, то есть площадь трапеции равна площади треугольника ABF . Но из равенства треугольников также вытекает, что $FK = BK$, то есть AK — медиана в треугольнике ABF . Тогда треугольник KAB по площади составит половину треугольника FAB , а значит, и данной трапеции. Ч.т.д.

Задача 5. Сторона AB параллелограмма $ABCD$ вдвое больше стороны AD . Точка K — середина стороны AB . Докажите, что DK — биссектриса угла ADC .



Решение.

Проведём FK параллельно AD (см. рис.). Имеем $AD = AK = KB$, следовательно, параллелограмм $AKFD$ является ромбом. Диагональ DK ромба $AKFD$ является биссектрисой угла ADC . ч.т.д.

Другой способ решения.

Рассмотрим треугольник AKD .

$AK = AD$ ($AD = AB : 2$), следовательно, данный треугольник равнобедренный.

По свойству равнобедренного треугольника $\angle ADK = \angle AKD$

$\angle AKD = \angle KDC$ (т.к. это накрест-лежащие углы).

Получается, что $\angle ADK = \angle AKD = \angle KDC$.

Следовательно, DK — биссектриса. Ч.т.д.