

Проект:
**«Решение задач с
помощью
диофантовых
уравнений»**

ВЫПОЛНИЛ УЧЕНИК

3 класса «В»

МБОУ Нахабинская СОШ № 3 с УИОП

Пичушкин Кирилл

РУКОВОДИТЕЛЬ ПРОЕКТА

Смирнова Светлана Владимировна

Оглавление

Введение (слайд 2)	3
Цели и задачи (слайд 3)	4
Решение линейных диофантовых уравнений (слайд 4)	5
Задача 1. Про обезьянок (слайд 5)	6
Задача 2. Про светофор	7
Задача 3. Про сдачу (слайд 6)	8
Задача 4. Про химию (слайд 7).....	9
Результаты исследования и выводы (слайд 8)	10
Список использованных источников	11

Введение

Как-то раз нам задали решить интересную задачку про обезьянок из школьного учебника. Я её решил методом перебора, но мама мне рассказала, что можно перебирать с умом. Для этого нужно составить и решить диофантово уравнение.

Диофантовыми уравнениями называют уравнения с целыми коэффициентами, для которых требуется найти целочисленные (или натуральные) решения. При этом количество неизвестных в уравнении должно быть не менее двух.

Своё название уравнения получили в честь выдающегося античного математика Диофанта Александрийского, жившего в III веке нашей эры. Он первым систематически изучал уравнения в целых числах и описывал методы их решения.

Все сохранившиеся записи собраны в книгу «Арифметика». В X веке она была переведена на арабский язык, а в XV веке – на латинский, что оказало большое влияние на развитие математики во всем мире.



Когда в XVII веке Пьер Ферма читал «Арифметику» Диофанта, он пришёл к выводу, что одно из уравнений, похожих на рассмотренные Диофантом, не имеет решений в целых числах, и заметил на полях, что он нашёл «поистине чудесное доказательство этой теоремы... однако поля книги слишком узки, чтобы его привести». Сейчас это утверждение известно как Великая теорема Ферма.

Цели и задачи

Цель проекта: научиться составлять и применять диофантовы уравнения для решения задач в целых числах.

Задачи проекта:

- узнать, как записываются линейные диофантовы уравнения с двумя неизвестными;
- познакомиться с логикой решения таких уравнений;
- найти несколько прикладных задач, которые можно решить с помощью диофантовых уравнений, и решить их.

Решение линейных диофантовых уравнений

В своей работе я буду рассматривать линейные диофантовы уравнения с двумя неизвестными вида

$$a \cdot x + b \cdot y = c.$$

К решению подобных уравнений сводятся разнообразные текстовые задачи, в которых неизвестные величины выражают количество предметов и поэтому являются натуральными целыми числами.

Поэтому в нашем уравнении коэффициенты a, b и c – целые числа, а неизвестные x и y являются натуральными числами.

Разработанная Диофантом теория позволяет вычислять равенства без использования сложных формул. Я буду использовать метод перебора и простую логику.

Найдем выражение для x :

$$x = \frac{c - b \cdot y}{a}$$

x – натуральное, значит $x \geq 1$. Получаем:

$$\frac{c - b \cdot y}{a} \geq 1$$

Отсюда:

$$c - b \cdot y \geq a$$

$$-b \cdot y \geq a - c$$

$$b \cdot y \leq c - a$$

$$y \leq \frac{c - a}{b}$$

y – натуральное, значит $y \geq 1$. Получаем диапазон для y :

$$1 \leq y \leq \frac{c - a}{b}$$

Для дальнейшего выбора значений y используем признаки делимости на a для выражения $c - b \cdot y$. После этого применяем метод перебора.

Задача 1. Про обезьянок

В цирке выступали обезьянки на двухколесных и трёхколесных велосипедах. Сколько было двух- и трёхколесных велосипедов, если всего было 8 велосипедов и 21 колесо?



Составляем диофантово уравнение:

$$2 \cdot x + 3 \cdot y = 21,$$

где x – количество двухколёсных велосипедов, y – количество трёхколёсных.

Выражение для x будет выглядеть так:

$$x = \frac{21 - 3 \cdot y}{2}$$

Воспользуемся выведенными формулами для y и получим диапазон:

$$1 \leq y \leq (21 - 2) : 3 \quad \text{или} \quad 1 \leq y \leq 6.$$

Выражение $21 - 3 \cdot y$ должно делиться на 2 без остатка, значит должно быть четным. Число 21 – нечетное, следовательно вычитаемое $3 \cdot y$ должно быть нечетным. Значит и y должно быть нечетным.

Из найденного диапазона подходят $y = 1, 3, 5$, подставим их в выражение для x :

$$y = 1 \Rightarrow x = (21 - 3 \cdot 1) : 2 = 9;$$

$$y = 3 \Rightarrow x = (21 - 3 \cdot 3) : 2 = 6;$$

$$y = 5 \Rightarrow x = (21 - 3 \cdot 5) : 2 = 3.$$

В задаче сказано, что велосипедов всего 8, значит нам подходит третий вариант.

Ответ: 3 двухколесных велосипеда и 5 трёхколёсных.

Задача 2. Про светофор

Разрешающий сигнал светофора горит 62 секунды. Легковая машина проезжает перекресток за 5 секунд, а грузовик – за 8 секунд. Сколько и каких машин могут проехать перекресток за это время?



Составляем диофантово уравнение:

$$5 \cdot x + 8 \cdot y = 62,$$

где x – количество легковых машин, y – количество грузовиков.

Выражение для x будет выглядеть так:

$$x = \frac{62 - 8 \cdot y}{5}$$

Воспользуемся выведенными формулами для y и получим диапазон:

$$1 \leq y \leq (62 - 5) : 8 \quad \text{или} \quad 1 \leq y \leq 7.$$

Выражение $62 - 8 \cdot y$ должно делиться на 5 без остатка, значит должно заканчиваться цифрами 0 или 5. Число 62 делится на 5 с остатком 2, следовательно вычитаемое $8 \cdot y$ должно заканчиваться цифрами 2 или 7.

Из найденного диапазона подходит $y = 4$, подставим его в выражение для x :

$$y = 4 \Rightarrow x = (62 - 8 \cdot 4) : 5 = 6.$$

Ответ: 6 легковых машин и 4 грузовика.

Задача 3. Про сдачу

Кирилл пришел в магазин, у него с собой только пятирублёвые монеты. А у продавца в кассе остались только двухрублёвые. Сможет ли Кирилл купить бутылку воды за 19 рублей и получить правильную сдачу?



Составляем диофантово уравнение:

$$5 \cdot x - 2 \cdot y = 19,$$

где x – количество пятирублёвых монет, которое должен отдать Кирилл, y – количество двухрублёвых монет, которое он получит на сдачу.

Выражение для x будет выглядеть так:

$$x = \frac{19 + 2 \cdot y}{5}$$

Здесь при любом натуральном y получаем $x \geq 1$, уравнение имеет бесконечное множество решений, поэтому шаг с определением верхней границы y пропускаем.

Выражение $19 + 2 \cdot y$ должно делиться на 5 без остатка, значит должно заканчиваться цифрами 0 или 5. Число 19 делится на 5 с остатком 4, следовательно слагаемое $2 \cdot y$ должно заканчиваться цифрами 1 или 6, но $2 \cdot y$ – четное, поэтому остается только 6. Найдем несколько таких значений: $2 \cdot y = 6, 16, 26$ и т. д.

Отсюда получаем: $y = 3, 8, 13$ и т. д. Подставим его в выражение для x :

$$y = 3 \Rightarrow x = (19 + 2 \cdot 3) : 5 = 5;$$

$$y = 8 \Rightarrow x = (19 + 2 \cdot 8) : 5 = 7;$$

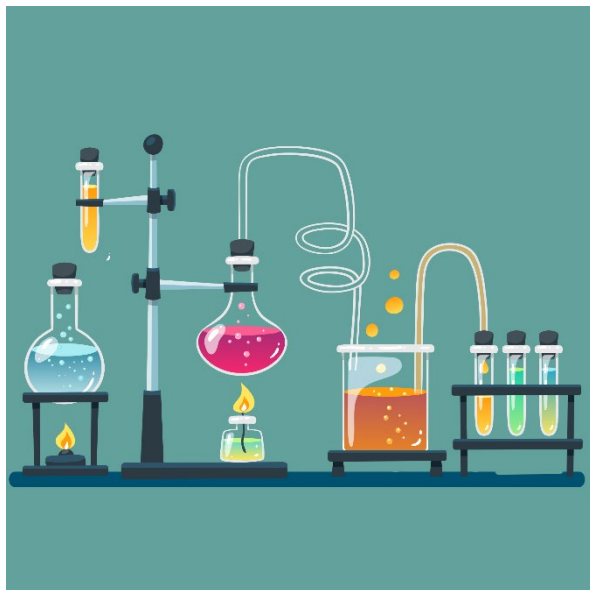
$$y = 13 \Rightarrow x = (19 + 2 \cdot 13) : 5 = 9.$$

Для ответа возьмём первый вариант, как самый рациональный.

Ответ: Если Кирилл отдаст 5 пятирублевых монет, то получит в качестве сдачи 3 двухрублевые монеты и никто никому не будет должен.

Задача 4. Про химию

Смешали 10%-ный и 25%-ный растворы пероксида водорода и получили 3кг 20%-ного раствора. Какое количество каждого раствора в килограммах было использовано?



Составляем диофантово уравнение:

$$10 \cdot x + 25 \cdot y = 20 \cdot 3,$$

где x – количество килограммов 10%-ного раствора, y – количество килограммов 25%-ного раствора.

Разделим каждую часть уравнения на 5:

$$2 \cdot x + 5 \cdot y = 12.$$

Выражение для x будет выглядеть так:

$$x = \frac{12 - 5 \cdot y}{2}$$

Воспользуемся выведенными формулами для y и получим диапазон:

$$1 \leq y \leq (12 - 2) : 5 \quad \text{или} \quad 1 \leq y \leq 2.$$

Выражение $12 - 5 \cdot y$ должно делиться на 2 без остатка, значит должно быть четным. Число 12 – чётное, следовательно вычитаемое $5 \cdot y$ должно быть чётным.

Отсюда получаем: $y = 2$. Подставим его в выражение для x :

$$y = 2 \Rightarrow x = (12 - 5 \cdot 2) : 2 = 1.$$

Ответ: 1 килограмм 10%-ного раствора и 2 килограмма 25%-ного раствора.

Результаты исследования и выводы

Я понимаю, что мой проект может быть полезен разным людям:

- химикам, которым нужны правильные смеси, как в четвертой задаче;
- экономистам, чтобы никто никому не был должен, как в третьей задаче;
- сотрудникам ЦОДД, чтобы понимать, как лучше отрегулировать светофоры, как во второй задаче, чтобы было меньше пробок;
- и третьеклассникам, которым задали задачу со звёздочкой.

Всем этим людям я дам такие советы:

1. Не все задачи удобно решать "в лоб".
2. Для эффективного решения задач пользуйтесь трудами древних учёных, например уравнениями Диофанта.
3. Когда будете изучать труды древних учёных, вспомните про Пьера Ферма и берите тетрадку с широкими полями.
4. Если вам скучно решать задачу, значит у неё есть более красивое и простое решение, ведь математика - это интересно!

Список использованных источников

1. Диофантово уравнение. Википедия

<https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%94%D0%B8%D0%BE%D1%84%D0%B0%D0%BD%D1%82%D0%BE%D0%B2%D0%BE%D1%83%D1%80%D0%B0%D0%B2%D0%BD%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D0%B5>

2. Диофант Александрийский. Википедия.

<https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%94%D0%B8%D0%BE%D1%84%D0%B0%D0%BD%D1%82%D0%90%D0%BB%D0%B5%D0%BA%D1%81%D0%B0%D0%BD%D0%B4%D1%80%D0%B8%D0%B9%D1%81%D0%BA%D0%B8%D0%B9>

3. ШКОЛА РОССИИ. ФГОС. Математика. 3 класс. Учебник для общеобразовательных организаций. В двух частях. Часть 1.

4. Диофантовы уравнения - методы, алгоритмы и примеры решения

<https://nauka.club/matematika/diofantovy-uravneniy%D0%B0.html>