

АЛИКВОТНАЯ ГЕОМЕТРИЯ И НАИМЕНЬШЕЕ ОБЩЕЕ КРАТНОЕ

Аннотация: В работе рассматриваются вопросы классификации фигур в Аликвотной геометрии. Понятие «Аликвотная геометрия» введено автором самостоятельно.

Аликвотная геометрия — это геометрия, в которой стороны, площадь и периметр фигур представлены аликвотными дробями, то есть дробями вида $\frac{1}{a}$, где $a \in N$, $a \neq 1$.

Выделим четыре класса на множестве аликвотных геометрических фигур: «нищие», «бедные», «богатые», «олигархи».

«Нищие» — это класс аликвотных геометрических фигур, которые не имеют ни аликвотного периметра, ни аликвотной площади.

«Бедные» — это класс аликвотных геометрических фигур, которые имеют аликвотный периметр, но не имеют аликвотной площади.

«Богатые» — это класс аликвотных геометрических фигур, которые не имеют аликвотного периметра, но имеют аликвотную площадь.

«Олигархи» — это класс аликвотных геометрических фигур, которые имеют как аликвотный периметр, так и аликвотную площадь.

Ключевые слова: аликвотная геометрия, аликвота.

Текст статьи

I Введение

С обыкновенными дробями мы познакомились еще в 5 классе на уроках математики. Изучая дроби, я обратил внимание на определение аликвотных дробей. Меня заинтересовала их история возникновения и применение в современном мире.

Впервые аликвотные или единичные дроби начали использоваться в древнем Египте. Аликвотные дроби нужны были египтянам в практических целях.

Математики Древнего Египта считали «настоящими» дробями те, которые выражают долю целого. Аликвотная или единичная дробь – это дробь, числитель которой равен единице, а знаменатель представляет натуральное число. Аликвотные дроби встречаются в древнейших, дошедших до нас

математических текстах, составленных более 5000 лет тому назад, – древнеегипетских папирусах и вавилонских клинописных табличках. Они нужны были для практических целей.

Для упрощения расчетов были составлены таблицы, в которых некоторые дробные числа представлялись суммой аликвотных дробей. В древней рукописи «Папирус Ахмеса» обнаружена такая таблица.

Аликвотные дроби также успешно использовали математики Древней Греции, после чего ими стал пользоваться весь мир несмотря на то, что древние математики высказывали замечания насчет аликвотных дробей. Например, Клавдий Птолемей твердил о неудобстве применения аликвотных дробей в сравнении с системой Вавилона.

В современной математике аликвотные дроби по сегодняшний день изучают в теории чисел и в истории возникновения математики, хотя вместо аликвотных дробей уже давно все используют обыкновенные и десятичные дроби.

В наше время продолжается изучение задач, которые связаны с аликвотными дробями:

- в конце XX ученые смогли дать оценку самого большого знаменателя и длины разложения обыкновенной дроби в аликвотную
- также была выдвинута гипотеза Эрдешем и Грэхемом, которые утверждают, что для любой раскладки целых чисел, которые больше единицы в $r > 0$ цветов может существовать конечное подмножество S целых. В 2003 году дана гипотеза была доказана известным математиком Эрнестом Крутом.

Задачи с использованием аликвотных дробей составляют обширный класс нестандартных задач. Аликвотные дроби используются тогда, когда

требуется что-то разделить на несколько частей с наименьшим количеством действий для этого.

Таким образом, аликвотные дроби долгое время были единственными дробями, с которыми как-то умел оперировать человек, а правила действий с произвольными дробями разработаны «сравнительно недавно».

Меня заинтересовала тема аликвотных фигур в геометрии. Появился ряд вопросов. Есть ли какая-то особенность в арифметике этих дробей? Каким свойством обладают геометрические фигуры со сторонами равными аликвотным дробям? А возможна ли их классификация? Если да, то по каким признакам?

Цель исследования: введение классификации геометрических фигур со сторонами равными аликвотным дробям.

Задачи исследования:

1. Выявить и доказать необходимые и достаточные условия классификации некоторых многоугольников.
2. Выработать алгоритм построения аликвотного прямоугольного треугольника.

Понятие «аликвотная геометрия» было введено нами самостоятельно. Аликвотная геометрия — это геометрия, в которой стороны, площадь и периметр фигур представлены аликвотными дробями, то есть дробями вида $\frac{1}{a}$, где $a \in \mathbb{N}$, $a \neq 1$.

Выделим четыре класса на множестве аликвотных геометрических фигур: «нищие», «бедные», «богатые», «олигархи».

«Нищие» — это класс аликвотных геометрических фигур, которые не имеют ни аликвотного периметра, ни аликвотной площади.

«Бедные» — это класс аликвотных геометрических фигур, которые имеют аликвотный периметр, но не имеют аликвотной площади.

«Богатые» – это класс аликвотных геометрических фигур, которые не имеют аликвотного периметра, но имеют аликвотную площадь.

«Олигархи» – это класс аликвотных геометрических фигур, которые имеют как аликвотный периметр, так и аликвотную площадь.

II Основная часть

АЛИКВОТНЫЕ КВАДРАТЫ

Теорема №1

Любой аликвотный квадрат - богатая фигура, а олигархом является лишь в том случае, когда знаменатель дроби кратен четырем.

Доказательство.

а) $S = \left(\frac{1}{a}\right)^2 = \frac{1}{a^2}$ -аликвотная дробь, ч. и т. д.

б) Если сторона квадрата равна $\frac{1}{4a}$, то $P = 4 \times \frac{1}{4a} = \frac{1}{a}$ -аликвотная дробь, что и требовалось доказать.

Теорема №2

Аликвотный квадрат со стороной $\frac{1}{2}$ не является бедной фигурой.

Доказательство.

$\frac{1}{2}$ -самая большая аликвотная дробь, значит, его периметр не может быть аликвотной дробью, т. к. будет больше $\frac{1}{2}$.

Данное утверждение является истиной для любой аликвотной геометрической фигуры.

АЛИКВОТНЫЕ ПРЯМОУГОЛЬНИКИ

Для начала рассмотрим множество прямоугольников и разобьем его на подмножества по указанным классификационным признакам.

Лемма №1

Любой прямоугольник-богатая фигура.

Доказательство: площадь равна $\frac{1}{a} \times \frac{1}{b} = \frac{1}{ab}$

Найдем условие, при котором прямоугольник является олигархом.

Лемма №2

Сумма двух аликвотных дробей будет аликвотной в том случае, когда аликвотные слагаемые можно представить в виде $\frac{1}{pq}$ и $\frac{1}{p(p-q)}$.

Доказательство.

$$\frac{1}{pq} + \frac{1}{p(p-q)} = \frac{p-q+q}{pq(p-q)} = \frac{p}{pq(p-q)} = \frac{1}{q(p-q)}, \text{ что и требовалось доказать.}$$

Теорема.

Аликвотный прямоугольник со сторонами $\frac{1}{pq}$ и $\frac{1}{p(p-q)}$ имеет аликвотный периметр, если выражение $q(p-q)$ кратно двум.

Доказательство.

1 случай. q кратно 2, $q=2n$.

$$P = 2 \left(\frac{1}{2pn} + \frac{1}{p(p-2n)} \right) = 2 \left(\frac{p-2n+2n}{2pn(p-2n)} \right) = \frac{2p}{2pn(p-2n)} = \frac{1}{n(p-2n)}.$$

2 случай, когда $p-q=2n$ рассматривается аналогично.

Например, прямоугольник со сторонами $\frac{1}{9}$ и $\frac{1}{72}$ - олигарх, потому что его площадь и периметр равны $\frac{1}{648}$ и $\frac{1}{4}$ соответственно.

АЛИКВОТНЫЕ ПРЯМОУГОЛЬНЫЕ ТРЕУГОЛЬНИКИ

Рассмотрев множество прямоугольных треугольников, мы нашли алгоритм разбиения его на подмножества по указанным классификационным признакам.

Теорема.

Любой аликвотный прямоугольный треугольник относится к классу «богатых» фигур, то есть аликвотных фигур, имеющих аликвотную площадь.

Доказательство.

Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения катетов, то есть $S = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}$, $S = \frac{1}{2ab}$, а это значит, что и площадь выражается аликвотной дробью.

Нами создан алгоритм построения аликвотного прямоугольного треугольника-олигарха, суть которого в следующем: **делим длины сторон произвольного треугольника, которые выражены натуральными числами, и периметр на их наименьшее общее кратное.**

Рассмотрим египетский треугольник – это прямоугольный треугольник со сторонами 3, 4 и 5. Его периметр равен $3+4+5=12$.

НОК (3, 4, 5, 6, 12) = 60. Получим: аликвотный прямоугольный треугольник со сторонами $\frac{1}{20}$, $\frac{1}{15}$ и $\frac{1}{12}$, периметр которого равен $\frac{1}{5}$.

Найденный нами алгоритм мы можем применять для создания любых аликвотных геометрических фигур.

Замечание.

Если периметр фигуры равен наименьшему общему кратному, то деление производим на общее кратное большее НОК.

Пример.

Рассмотрим прямоугольник со сторонами 5 и 10, его периметр равен 30. НОК (5; 10; 30) равен 30, поэтому возьмём НОК (5; 10; 30) равный 60. Получим аликвотный прямоугольник «олигарх» со сторонами $\frac{1}{12}$ и $\frac{1}{6}$, периметр которого равен $\frac{1}{2}$.

АЛИКВОТНЫЕ РАВНОБЕДРЕННЫЕ ТРЕУГОЛЬНИКИ

Теорема.

Аликвотный равнобедренный треугольник является бедным в том случае, когда его боковые стороны равны $\frac{1}{2pq}$, а основание равно $\frac{1}{p(p-q)}$.

Доказательство.

$$\frac{1}{2pq} + \frac{1}{2pq} + \frac{1}{p(p-q)} = \frac{p-q+p-q+2q}{2pq(p-q)} = \frac{2p}{2pq(p-q)} = \frac{1}{q(p-q)}$$

Например, аликвотный треугольник со сторонами $\frac{1}{20}$, $\frac{1}{20}$ и $\frac{1}{15}$ является бедным.

Алгоритм создания аликвотного равнобедренного треугольника, являющегося богатым.

Для построения богатого равнобедренного аликвотного треугольника возьмем два равных аликвотных прямоугольных треугольника с катетами равными $\frac{1}{a}$ и $\frac{1}{2n}$, и совместим их катетами $\frac{1}{a}$.

Пример

Возьмем аликвотный прямоугольный треугольник с катетами $\frac{1}{20}$, $\frac{1}{15}$ и гипотенузой, равной $\frac{1}{12}$. Найдем его площадь. Она равна $\frac{1}{300}$.

Заметим, что периметр полученного аликвотного равнобедренного треугольника равен $\frac{4}{15}$, значит, олигархом он не является.

АЛИКВОТНЫЕ РАЗНОСТОРОННИЕ ТРЕУГОЛЬНИКИ.

Наш алгоритм позволяет без проблем построить аликвотный разносторонний треугольник, являющегося бедным. Поэтому задачей данной главы будет создание алгоритма для построения «олигарха».

Высота разбивает треугольник на два прямоугольных треугольника. Возьмем два прямоугольных треугольника с равными катетами, стороны которых выражены натуральными числами. Для этого используем таблицу Пифагоровых троек. Пифагорова тройка – комбинация из трех натуральных чисел, удовлетворяющих соотношению Пифагора ($a^2 + b^2 = c^2$). Например, стороны первого прямоугольного треугольника 5, 12 и 13, а стороны второго – 9, 12 и 15. Совместим их катетами, равными 12, и получим разносторонний треугольник со сторонами 13, 14 и 15, периметр которого равен 42, а одна из высот равна 12. Далее воспользуемся нашим алгоритмом. НОК(12, 13, 14, 15, 42) равен 5460. Делим значения длин сторон, высоты и периметра на найденный НОК. Получаем аликвотный разносторонний треугольник со сторонами $\frac{1}{420}$, $\frac{1}{390}$ и $\frac{1}{364}$, высотой $\frac{1}{455}$ и периметром $\frac{1}{130}$. Площадь этого треугольника будет равна $\frac{1}{354900}$.

III. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Практическая значимость исследования заключается в возможности использования его результатов при решении олимпиадных заданий с аликвотными дробями, а также учитывать особенности площадей и периметров аликвотных многоугольников.

В работе над созданием алгоритма построения аликвотных фигур-олигархов мы нашли еще одно применение разделу математики «Делимость чисел».

Итоги исследования:

1. Найденны условия разбиения множеств квадратов, прямоугольников и прямоугольных треугольников на подмножества по указанным классификационным признакам. Например, любой аликвотный квадрат -

богатая фигура, а олигархом является лишь в том случае, когда знаменатель дроби кратен четырем.

2. Создан алгоритм построения аликвотного прямоугольного треугольника-олигарха, суть которого в следующем: делим длины сторон произвольного прямоугольного треугольника, которые выражены натуральными числами, и периметр на их наименьшее общее кратное, таким образом, найдено еще одно применение разделам математики «Делимость чисел» и «Пифагоровы тройки».

Нами введена классификация геометрических фигур со сторонами, равными аликвотным дробям, выявлены и доказаны необходимые и достаточные условия классификации некоторых многоугольников, выработан алгоритм построения аликвотных прямоугольного и разностороннего треугольников.

Актуальность исследования состоит не только в углублении знаний по геометрии, но и в том, что дает возможность посмотреть на древнюю науку с иной стороны (геометрия была бы бедна, если бы человечество пользовались только аликвотными дробями. Некоторые фигуры были бы без периметра, а некоторые – без площади, а другие – и без того, и без другого).

Можно продолжить исследование данной темы. Знакомство на уроках геометрии с другими видами многоугольников даст возможность расширить теоретическую базу аликвотной геометрии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Источник (Дорофеев Г. В., Петерсон Л.Г. Математика. 5 класс. 2011 год.)