

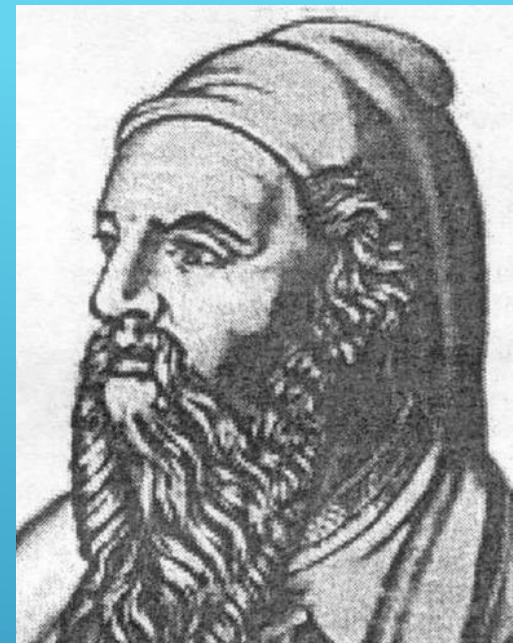
АЛИКВОТНАЯ ГЕОМЕТРИЯ И НАИМЕНЬШЕЕ ОБЩЕЕ КРАТНОЕ

**Автор: Хухрин Данил Павлович,
ученик 10Б класса, МБОУ «Лицей №153»**

**Руководитель: Петров Константин Викторович,
учитель математики, высшая категория**

2022 год

ПАПИРУС АХМЕСА



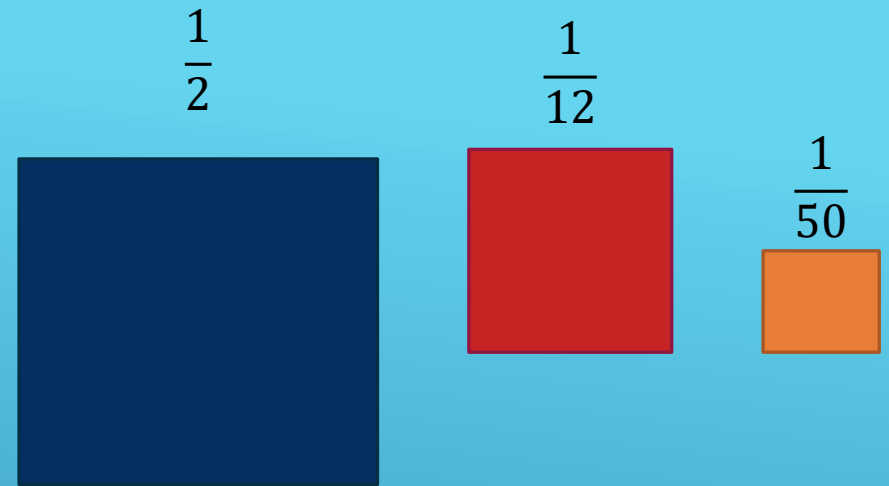
Ахмес
(ок.1660-1620гг. До н.э.)

- ▶ Аликвотная дробь-дробь с числителем 1, знаменателем любым натуральным числом, кроме 1.
- ▶ Аликвотная геометрия-геометрия, которая рассматривает множество фигур с аликутными сторонами.

КЛАССИФИКАЦИЯ АЛИКВОТНЫХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФИГУР

	Алиquotный периметр	Алиquotная площадь
Нищие	-	-
Бедные	+	-
Богатые	-	+
Олигархи	+	+

АЛИКВОТНЫЕ КВАДРАТЫ



Теорема №1

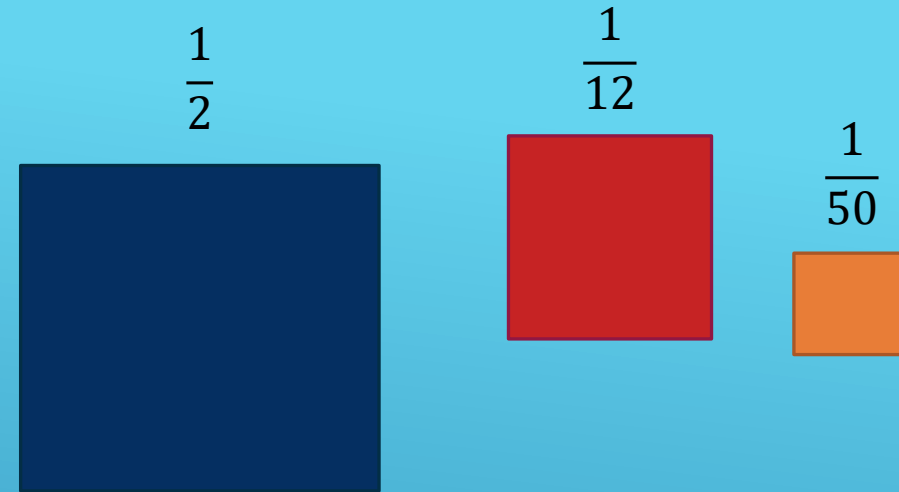
Любой аликвотный квадрат - богатая фигура, а олигархом является лишь в том случае, когда знаменатель дроби кратен четырем.

Доказательство.

а) $S = \left(\frac{1}{a}\right)^2 = \frac{1}{a^2}$

б) Если сторона квадрата равна $\frac{1}{4a}$, то $P = 4 \times \frac{1}{4a} = \frac{1}{a}$

АЛИКВОТНЫЕ КВАДРАТЫ



Теорема №2

Алиquotный квадрат со стороной $\frac{1}{2}$ не является бедной фигурой.

Доказательство.

$\frac{1}{2}$ – самая большая алиquotная дробь, значит, его периметр не может быть алиquotной дробью, т. к. будет больше $\frac{1}{2}$.

Следствие №1

Данное утверждение является истинным для любой алиquotной геометрической фигуры.

Следствие №2

Алиquotный квадрат со стороной $\frac{1}{2}$ не является олигархом.

АЛИКВОТНЫЕ ПРЯМОУГОЛЬНИКИ

Лемма №1

Любой прямоугольник-богатая фигура.

Доказательство: площадь равна $\frac{1}{a} \times \frac{1}{b} = \frac{1}{ab}$

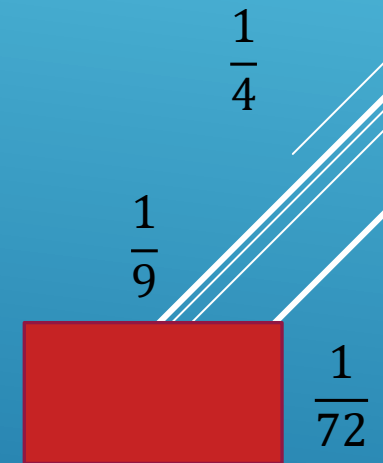
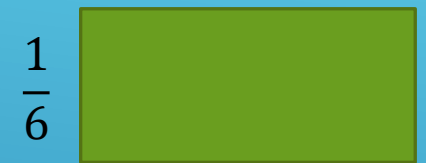
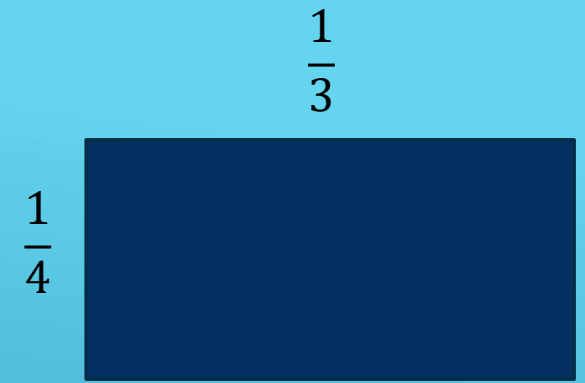
Лемма №2

Сумма двух аликвотных дробей будет аликвотной в том случае, когда аликвотные слагаемые можно представить в виде $\frac{1}{pq}$ и $\frac{1}{p(p-q)}$.

Доказательство.

Рассмотрим сумму сторон

$$\frac{1}{pq} + \frac{1}{p(p-q)} = \frac{p-q+q}{pq(p-q)} = \frac{p}{pq(p-q)} = \frac{1}{q(p-q)}, \text{ что и требовалось доказать.}$$



АЛИКВОТНЫЙ ПРЯМОУГОЛЬНИК

Теорема

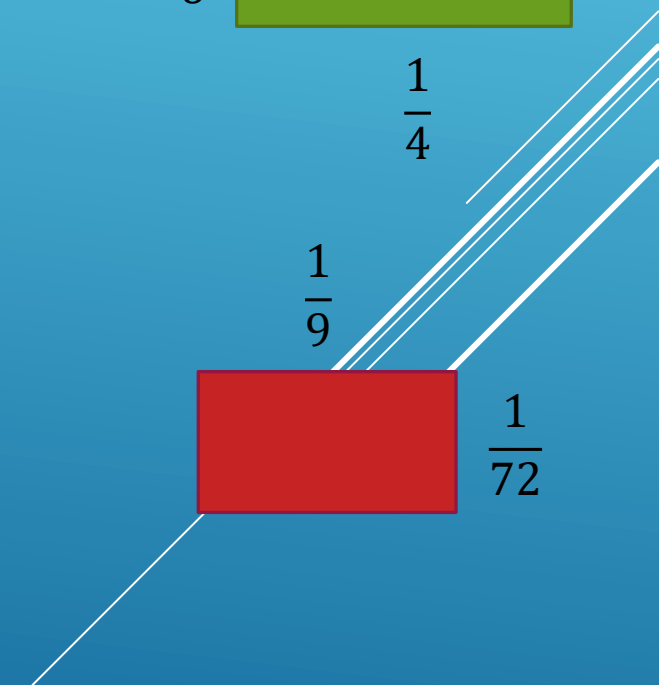
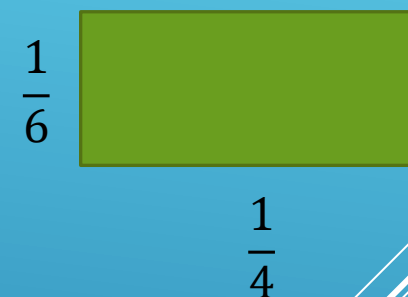
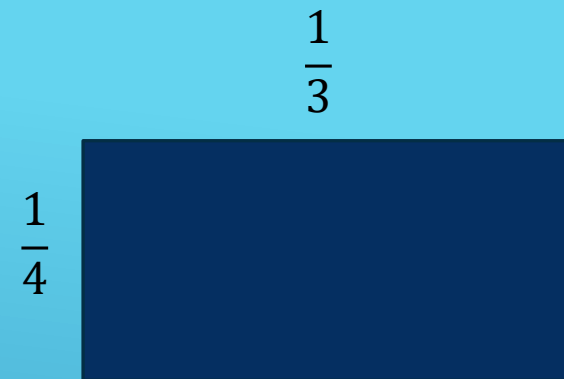
Аликвотный прямоугольник со сторонами $\frac{1}{pq}$ и $\frac{1}{p(p-q)}$ имеет аликвотный периметр, если выражение $p(p-q)$ кратно двум.

Доказательство.

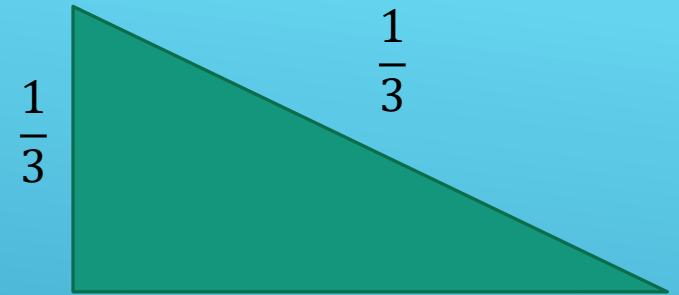
1 случай. q кратно 2, $q=2n$.

$$P = 2 \left(\frac{1}{2pn} + \frac{1}{p(p-2n)} \right) = 2 \left(\frac{p-2n+2n}{2pn(p-2n)} \right) = \frac{2p}{2pn(p-2n)} = \frac{1}{n(p-2n)}.$$

2 случай, когда $p-q=2n$ рассматривается аналогично.



АЛИКВОТНЫЕ ПРЯМОУГОЛЬНЫЕ ТРЕУГОЛЬНИКИ



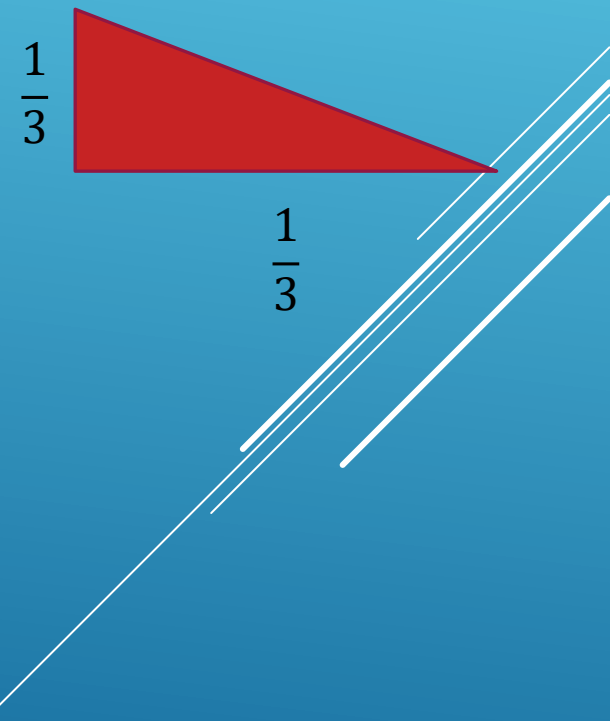
Теорема.

Любой аликвотный прямоугольный треугольник относится к классу «богатых» фигур.

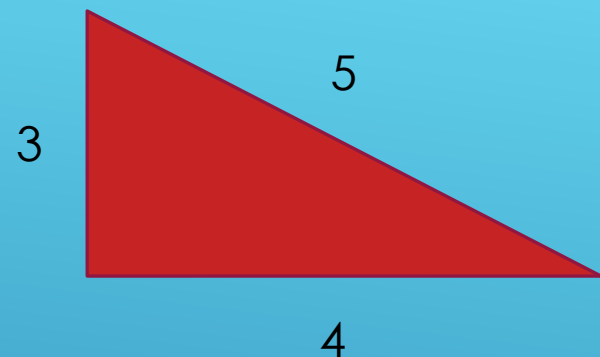
Доказательство.

Рассмотрим площадь прямоугольного треугольника, то есть $S = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{a} \cdot$

$$\frac{1}{b}, \quad S = \frac{1}{2ab}.$$



АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ АЛИКВОТНОГО ПРЯМОУГОЛЬНОГО ТРЕУГОЛЬНИКА-ОЛИГАРХА



Делим длины сторон произвольного треугольника, которые выражены натуральными числами, и периметр на их наименьшее общее кратное.

Например, НОК (3, 4, 5, 12) = 60. Получим: аликвотный прямоугольный треугольник со сторонами $\frac{1}{20}$, $\frac{1}{15}$ и $\frac{1}{12}$, периметр которого равен $\frac{1}{5}$.

АЛИКВОТНЫЕ РАВНОБЕДРЕННЫЕ ТРЕУГОЛЬНИКИ

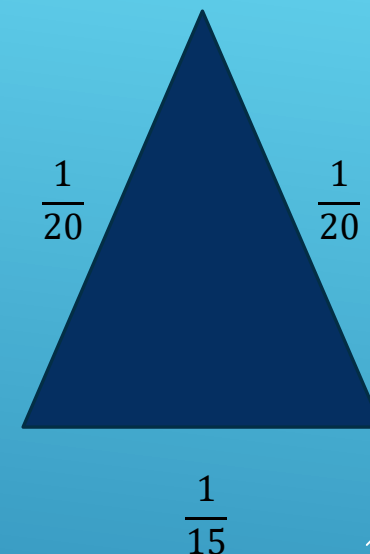
Теорема.

Аликвотный равнобедренный треугольник является бедным в том случае, когда его боковые стороны равны $\frac{1}{2pq}$, а основание равно $\frac{1}{p(p-q)}$.

Доказательство.

$$\frac{1}{2pq} + \frac{1}{2pq} + \frac{1}{p(p-q)} = \frac{p-q+p-q+2q}{2pq(p-q)} = \frac{2p}{2pq(p-q)} = \frac{1}{q(p-q)}$$

Например, аликвотный треугольник со сторонами $\frac{1}{20}$, $\frac{1}{20}$ и $\frac{1}{15}$ является бедным.



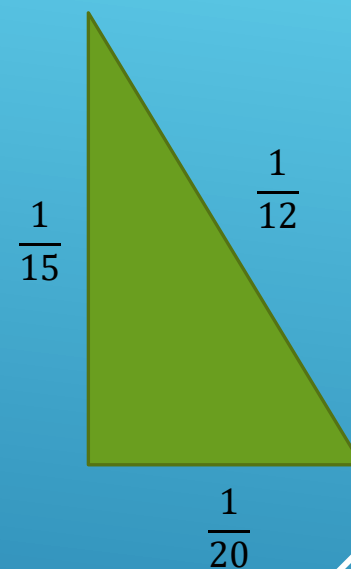
АЛГОРИТМ СОЗДАНИЯ АЛИКВОТНОГО РАВНОБЕДРЕННОГО ТРЕУГОЛЬНИКА, ЯВЛЯЮЩЕГОСЯ БОГАТЫМ

Для построения богатого равнобедренного аликвотного треугольника возьмем два равных аликвотных прямоугольных треугольника с катетами равными $\frac{1}{a}$ и $\frac{1}{2n}$, и совместим их катетами $\frac{1}{a}$.

Пример

Возьмем аликвотный прямоугольный треугольник с катетами $\frac{1}{20}$, $\frac{1}{15}$ и гипотенузой, равной $\frac{1}{12}$. Найдем его площадь. Она равна $\frac{1}{300}$.

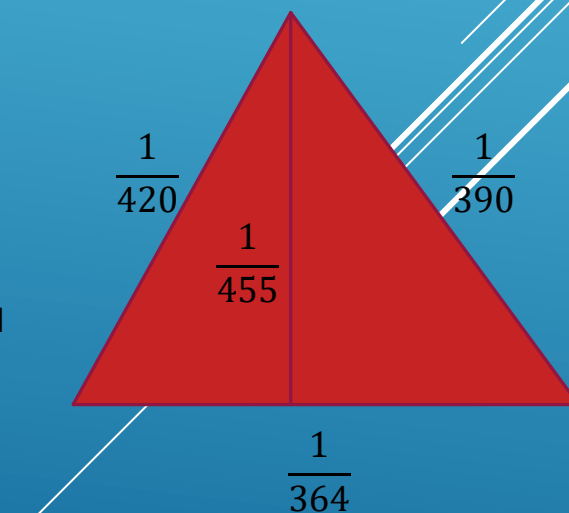
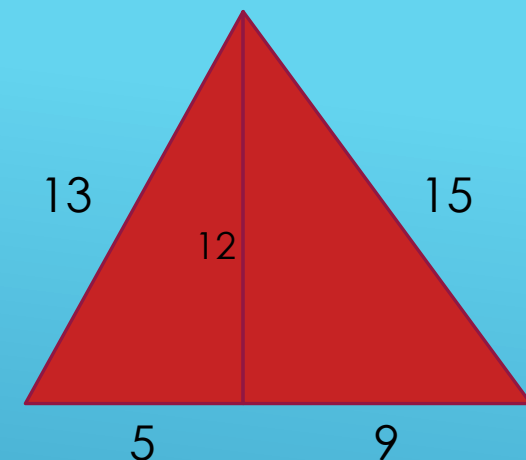
Заметим, что периметр полученного аликвотного равнобедренного треугольника равен $\frac{4}{15}$, значит, олигархом он не является.



АЛИКВОТНЫЕ РАЗНОСТОРОННИЕ ТРЕУГОЛЬНИКИ

Наш алгоритм позволяет без проблем построить аликвотный разносторонний треугольник, являющегося бедным. Поэтому задачей данной главы будет создание алгоритма для построения «олигарха».

Возьмем два прямоугольных треугольника с равными катетами, стороны которых выражены натуральными числами. Для этого используем таблицу Пифагоровых троек. Пифагорова тройка – комбинация из трех натуральных чисел, удовлетворяющих соотношению Пифагора ($a^2 + b^2 = c^2$). Например, стороны первого прямоугольного треугольника 5, 12 и 13, а стороны второго – 9, 12 и 15. Совместим их катетами, равными 12, и получим разносторонний треугольник со сторонами 13, 14 и 15, периметр которого равен 42, а одна из высот равна 12. Далее воспользуемся нашим алгоритмом. НОК(12, 13, 14, 15, 42) равен 5460. Делим значения длин сторон, высоты и периметра на найденный НОК. Получаем аликвотный разносторонний треугольник со сторонами $\frac{1}{420}$, $\frac{1}{390}$ и $\frac{1}{364}$, высотой $\frac{1}{455}$ и периметром $\frac{1}{130}$. Площадь этого треугольника будет равна $\frac{1}{354900}$.



ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Практическая значимость моего исследования заключается в возможности использования его результатов при решении олимпиадных заданий с аликвотными дробями, а также учитывать особенности площадей и периметров аликвотных многоугольников.

В работе над созданием алгоритма построения аликвотных фигур-олигархов, мы нашли еще одно применение разделу математики «Делимость чисел».

Наша исследовательская деятельность состоит не только в углублении знаний по геометрии, но и в том, что дает возможность посмотреть на древнюю науку с иной стороны (геометрия была бы бедна, если бы человечество пользовались только аликвотными дробями. Некоторые фигуры были бы без периметра, а некоторые – без площади, а другие – и без того, и без другого).

Можно продолжить исследование данной темы. Знакомство на уроках геометрии с другими видами многоугольников даст возможность расширить теоретическую базу аликвотной геометрии.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!

