

Теоремы о пределах. Решение примеров.

При вычислении пределов функции используются теоремы, которые формулируются без доказательств.

■ ТЕОРЕМА I

Если существуют пределы функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ при $x \rightarrow a$, то существует также и предел их суммы, равный сумме пределов функций $f(x)$ и $\varphi(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + \varphi(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x).$$

■ ТЕОРЕМА II

Если существуют пределы функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ при $x \rightarrow a$, то существует также и предел их произведения, равный произведению пределов функций $f(x)$ и $\varphi(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot \varphi(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x).$$

■ ТЕОРЕМА III

Если существуют пределы функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ при $x \rightarrow a$, предел функции $\varphi(x)$ отличен от нуля, то существует также предел отношения $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, равный отношению пределов функций $f(x)$ и $\varphi(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x)}.$$

СЛЕДСТВИЕ 1. Постоянный множитель можно вынести за знак предела:

$$\lim_{x \rightarrow a} (kf(x)) = k \lim_{x \rightarrow a} f(x).$$

СЛЕДСТВИЕ 2. Если n — натуральное число, то справедливы соотношения: $\lim_{x \rightarrow a} x^n = a^n$, $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$.

СЛЕДСТВИЕ 3. Предел многочлена (целой рациональной функции)

$$F(x) = a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n$$

при $x \rightarrow a$ равен значению этого многочлена при $x = a$, т. е.

$$\lim_{x \rightarrow a} F(x) = F(a).$$

СЛЕДСТВИЕ 4. Предел дробно-рациональной функции

$$F(x) = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_{m-1} x + b_m}$$

при $x \rightarrow c$ равен значению этой функции при $x = c$, если c принадлежит области определения этой функции, т. е.

$$\lim_{x \rightarrow c} F(x) = F(c).$$

Рассмотрим некоторые нестандартные ситуации, возникающие при вычислении пределов функций.

1. Функция представляет собой дробь, предел знаменателя которой равен нулю. Например, для $f_1 = \frac{5}{4x - 8}$ определим $\lim_{x \rightarrow 2} f_1$. Теорему III о пределе частного применять нельзя, так как $\lim_{x \rightarrow 2} (4x - 8) = 0$. Таким образом, знаменатель f_1 есть величина бесконечно малая, а обратная ей величина $\frac{1}{4x - 8}$, таким образом, есть величина бесконечно большая, поэтому $\lim_{x \rightarrow 2} f_1 = \infty$.

2. Функция представляет собой дробь, пределы числителя и знаменателя которой равны нулю. Например, для $f_2 = \frac{3x^2 - 2x}{2x^2 - 5x}$ определим $\lim_{x \rightarrow 0} f_2$. Непосредственной подстановкой вместо аргумента его предельного значения вычислить $\lim_{x \rightarrow 0} f_2$ нельзя, так как при $x \rightarrow 0$ это вычисление сведется к определению отношения двух бесконечно малых величин.

Разложим числитель и знаменатель на множители, чтобы сократить дробь на общий множитель, значение которого стремится к нулю при $x \rightarrow 0$, и таким образом сделать возможным применение теоремы III. При этом не производится сокращения на нуль: по определению предела функции аргумент x стремится к своему предельному значению, никогда не достигая этого значения. Имеем

$$\lim_{x \rightarrow 0} f_2 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(3x - 2)}{x(2x - 5)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(3x - 2)}{(2x - 5)} = \frac{3 \cdot 0 - 2}{2 \cdot 0 - 5} = \frac{2}{5}.$$

Подобный случай будет иметь место и при определении $\lim_{x \rightarrow 0} f_3$ для $f_3 = \frac{x}{\sqrt{5 - x} - \sqrt{5 + x}}$. Здесь необходимо умножить числитель и знаменатель на сопряженный знаменателю множитель $(\sqrt{5 - x} + \sqrt{5 + x})$ и затем, сократив дробь на x , вычислить

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} f_3 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\sqrt{5-x} + \sqrt{5+x})}{(\sqrt{5-x} - \sqrt{5+x})(\sqrt{5-x} + \sqrt{5+x})} = \\ &= \frac{\sqrt{5} + \sqrt{5}}{-2} = -\sqrt{5}.\end{aligned}$$

3. Функция представляет собой разность двух бесконечно больших величин при стремлении аргумента к некоторому значению. Например, для функции $f_4 = \left(\frac{1}{x+2} - \frac{12}{x^3+8} \right)$ определим $\lim_{x \rightarrow \infty} f_4$. Здесь, выполнив действие вычитания, получим дробь, числитель и знаменатель которой стремятся к нулю при $x \rightarrow -2$. Далее поступаем, как и в случае с функцией f_2 ; сократив дробь на $(x+2)$, находим

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} f_4 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x - 8}{x^3 + 8} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+2)(x-4)}{(x+2)(x^2 - 2x + 4)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-4)}{x^2 - 2x + 4} = -\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

4. Некоторые слагаемые функции пределов не имеют. Например, определим $\lim_{x \rightarrow \infty} f_5$ для функции $f_5 = x^3 - 6x^2 + 5x - 1$. Первые три слагаемых при $x \rightarrow \infty$ пределов не имеют, поэтому нет возможности непосредственно воспользоваться следствием 3. Вынося x^3 за скобки, получаем:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x^3 \left(1 - \frac{6}{x} + \frac{5}{x^2} - \frac{1}{x^3} \right) \right) &= \lim_{x \rightarrow \infty} x^3 \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{6}{x} + \frac{5}{x^2} - \frac{1}{x^3} \right) = \infty \\ \left(\text{при } x \rightarrow \infty \text{ величины } \frac{6}{x}, \frac{5}{x^2} \text{ и } \frac{1}{x^3} \text{ — бесконечно малые и их пре-} \right. \\ \left. \text{делы равны нулю} \right).\end{aligned}$$

5. Знаменатель функции является величиной бесконечно большой. Например, определим $\lim_{x \rightarrow \infty} f_6$ для $f_6 = \frac{5}{4x+1}$. Так как знаменатель при $x \rightarrow \infty$ становится величиной бесконечно большой, то обратная ему функция $\frac{1}{4x+1}$ становится при $x \rightarrow \infty$ бесконечно малой. Произведение бесконечно малой на ограничен-

ную величину $\left(5 \cdot \frac{1}{4x+1}\right)$ есть величина бесконечно малая, следовательно, $\lim_{x \rightarrow \infty} f_6 = 0$.

6. Функция представляет собой дробь, числитель и знаменатель которой — величины бесконечно большие. Например, определим $\lim_{x \rightarrow \infty} f_7$ для функции $f_7 = \frac{2x+3}{5x+1}$. При непосредственном применении теоремы III приходим к выражению $\frac{\infty}{\infty}$. Поэтому для вычисления $\lim_{x \rightarrow \infty} f_7$ необходимо числитель и знаменатель разделить на x :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f_7 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+3}{5x+1} = \frac{2+0}{5+0} = \frac{2}{5}.$$

7. Функция представляет собой разность бесконечно больших величин. Например, определим $\lim_{x \rightarrow \infty} f_8$ для функции $f_8 = x - \sqrt{x^2 - 4}$. Умножив и разделив функцию на выражение $x + \sqrt{x^2 - 4}$, получим

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} f_8 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x - \sqrt{x^2 - 4})(x + \sqrt{x^2 - 4})}{x + \sqrt{x^2 - 4}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x^2 + 4x}{x + \sqrt{x^2 - 4}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{1 + \sqrt{1 - 4/x}} = \frac{4}{2} = 2. \end{aligned}$$