

## УРОК в 10-ом классе. Методы решения тригонометрических уравнений

Мне приходится делить время  
между политикой и уравнениями.  
Однако уравнения, по-моему, важнее.  
Политика только для данного момента,  
а уравнения будут существовать вечно

А. Эйнштейн

**(Приложение 1)**

Цели урока:

Предметные – знать определение обратных тригонометрических функций и уметь находить значения обратных тригонометрических функций; формулы записи ответа простейших тригонометрических уравнений и уметь применять эти формы при решении более сложных уравнений; знать значения основных тригонометрических углов и их расположение на тригонометрической окружности и уметь правильно записывать ответ.

Метапредметные – уметь анализировать текстовую информацию; на основе анализа информации самостоятельно формулировать и решать познавательные задачи, устанавливать логические связи.

Личностные - развитие интереса и познавательных способностей к предмету, умение работать в группе.

Задачи урока:

1. На основе устной работы вспомнить теоретический материал и осознать проблему;
2. В ходе работы с текстом учебника и раздаточным материалом разобрать основные методы решения более сложных тригонометрических уравнений;
3. На основе анализа полученной информации ответить на вопросы, составить конспект по методам решения тригонометрических уравнений;
4. Формировать коммуникативную компетенцию: умение работать в группе, представлять результат своей деятельности и деятельности группы;
5. Формировать положительную мотивацию к обучению, создавать позитивное эмоциональное отношение учеников к уроку и предмету.

Методы:

Формы организации: фронтальная, индивидуальная, групповая, самостоятельная.

Учебник:

1).Мордкович, А. Г. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. В 2 ч.

Ч.1.Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений (профильный уровень) /А.

Г. Мордкович, П. В. Семенов. - 9-е изд., стер. - М. : Мнемозина, 2012.

2). Мордкович, А. Г. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. В 2 ч. Ч. 2. Задачник для учащихся общеобразовательных учреждений (профильный уровень) / [А.Г.Мордкович В И др.]; под ред. А.Г. Мордковича. - 9-е изд., стер.- М. : Мнемозина, 2012.

**10 «а» класс модульный: 1 группа – информационно – технологическая (14 человек), 2 группа – социально – гуманитарная (15 человек). Данная группа – информационно – технологический модуль. На уроке учащиеся распределены на 4 группы. Способ деления на группы – выбор учителя. У каждой группы на столах раздаточный материал (Приложения для распечатки).**

Правильному применению методов можно научиться, только применяя их на разнообразных примерах  
Г. Цейтен

## ХОД УРОКА

### I. Организационный момент.

- определение отсутствующих,
- настрой учащихся на работу, организация внимания;

Здравствуйте, приветствуем гостей. Садитесь. Ребята, кто сегодня отсутствует? Все готовы к уроку? Итак, внимание. Начинаем! Сегодня у нас новый материал, но прежде повторим...

У вас на столах комплект материалов. Посмотрели, разобрали, оценочный лист подписали. Пусть будет у вас на виду – не забываем заполнять.

### II. Актуализация знаний. Устно.

№ 1. Вспомним определение арксинуса, арккосинуса, арктангенса и арккотангенса. Вычислите:

**Таблица 1. (Приложение 2)**

| 1 вариант                                  |                  | 2 вариант                                  |                  |
|--------------------------------------------|------------------|--------------------------------------------|------------------|
|                                            | <b>Ответы</b>    |                                            | <b>Ответы</b>    |
| $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}$               | $\frac{\pi}{4}$  | $\arccos \frac{\sqrt{2}}{2}$               | $\frac{\pi}{4}$  |
| $\arccos 1$                                | 0                | $\arcsin 1$                                | $\frac{\pi}{2}$  |
| $\arcsin \left(-\frac{1}{2}\right)$        | $-\frac{\pi}{6}$ | $\arccos \left(-\frac{1}{2}\right)$        | $\frac{2\pi}{3}$ |
| $\arccos \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ | $\frac{5\pi}{6}$ | $\arcsin \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ | $-\frac{\pi}{3}$ |
| $\operatorname{arctg} \sqrt{3}$            |                  |                                            | $\frac{\pi}{6}$  |

|  |                 |                             |  |
|--|-----------------|-----------------------------|--|
|  | $\frac{\pi}{3}$ | $\arctg \frac{\sqrt{3}}{3}$ |  |
|--|-----------------|-----------------------------|--|

Обменяйтесь тетрадями, проверьте ответы и оцените в баллах (на экране проецируются ответы). ([Приложение 3](#))

№2. Ребята, а теперь перейдем к решению простейших тригонометрических уравнений.

Напомните, пожалуйста, формулы решения уравнений вида  $\sin x = a$ ,  $\cos x = a$ ,  $\operatorname{tg} x = a$ .

Учащиеся называют формулы решения уравнений

**Таблица 2.**

|                           |                                                  |
|---------------------------|--------------------------------------------------|
| $\sin x = a$              | $x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ |
| $\cos x = a$              | $x = \pm \arccos a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$   |
| $\operatorname{tg} x = a$ | $x = \arctg a + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$        |

№ 3. Установите соответствие между уравнением и его решением. Как называются эти уравнения?

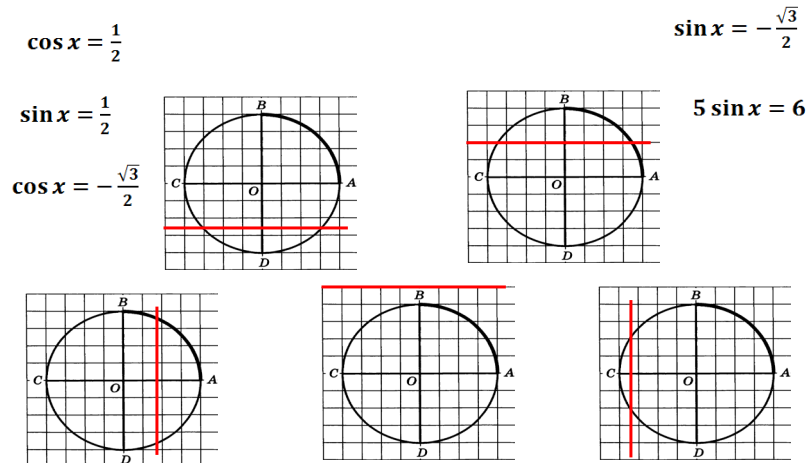
На экране проецируется задание (самопроверка). Проверьте ответы и оцените свои работы согласно шкале.

**Таблица 3. ([Приложение 4](#))**

Установите соответствие:

- |                              |                                                 |
|------------------------------|-------------------------------------------------|
| 1. $\sin x = 0$              | $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$  |
| 2. $\cos x = -1$             | $x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$                  |
| 3. $\sin x = 1$              | $x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$                   |
| 4. $\cos x = 1$              | $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$   |
| 5. $\operatorname{tg} x = 1$ | $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ |
| 6. $\sin x = -1$             | $x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$            |
| 7. $\cos x = 0$              | $x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$   |

№ 4. Какой рисунок соответствует решению соответствующего уравнения?



### III. Постановка целей и задач урока.

Мотивация учебной деятельности учащихся.

Ну, что – почва подготовлена. Решите уравнения...

Решить уравнения:

$$\sin^2 x - 3 \sin x \cdot \cos x + 2 \cos^2 x = 0$$

$$\sin x \cdot \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos x = 0$$

$$6 \sin^2 x - 5 \sin x + 1 = 0$$

$$2 \sin x - 3 \cos x = 0$$

Как вы видите, наших знаний не хватает, чтобы решить данные уравнения.

Сформулируем ТЕМУ нашего урока: **Методы решения тригонометрических уравнений.**

Обратимся к комплекту материалов.

Ваша задача: разобрать в группе, выбрать докладчика и объяснить метод.

Во время объяснения у доски метода и примера, учащиеся записывают в тетрадях: название метода и пример.

### IV. Первичное усвоение новых знаний.

#### Метод замены переменной ([Приложение 5](#))

Методом замены переменной решаются те тригонометрические уравнения, которые представляют собой квадратные уравнения относительно какой-либо тригонометрической функции. Если в уравнение входят различные тригонометрические функции, то надо выразить их через одну.

ПРИМЕР 1.  $2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0$

Это квадратное уравнение относительно  $\sin x$ .

Введём переменную  $y = \sin x$ . Тогда уравнение примет вид:

$$2y^2 + 3y - 2 = 0. y_1 = \frac{1}{2}, y_2 = -2.$$

$$\sin x = \frac{1}{2}, \quad \sin x = -2, \text{ нет корней, так как } E(\sin) = [-1, 1].$$

$$x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$$

Ответ:  $x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$

Решите уравнение:

1)  $6\sin^2 x - 5\sin x + 1 = 0$ .

### Метод разложения на множители ([Приложение 6](#))

Если уравнение можно преобразовать к виду  $f(x) \cdot g(x) = 0$ , то решение данного уравнения сводится к решению совокупности уравнений  $f(x) = 0$ ;  $g(x) = 0$ .

При решении тригонометрических уравнений, решаемых разложением на множители, нужно использовать все известные способы разложения на множители: вынесения общего множителя за скобки; группировка; применение формул сокращённого умножения и деления, искусственные приёмы.

ПРИМЕР 1.  $\sin x \cdot \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos x = 0$

$$\cos x \left( \sin x - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 0$$

$$\cos x = 0$$

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Ответ:  $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$

$$x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in Z$$

Решите уравнения:

1)  $\operatorname{ctg}^2 x - 4 \operatorname{ctg} x = 0$ ,

Внимание! Хочу сразу обратить ваше внимание на один вопрос, который обычно беспокоит учащихся, особенно в начале изучения темы «Тригонометрические уравнения»: обязательно ли при записи разных серий решений тригонометрического уравнения использовать в качестве параметра различные буквы. Если речь идёт о совокупности уравнений, т.е. о независимых друг от друга уравнениях, то буква может быть одна. А вот в системах тригонометрических уравнений дело обстоит иначе: там необходимо

использовать разные обозначения для параметра в различных уравнениях системы, это носит принципиальный характер.

### Однородные тригонометрические уравнения I степени ([Приложение 7](#))

Тригонометрическое уравнение называют однородным, если после некоторой замены полученный многочлен от двух переменных составлен из одночленов одинаковой степени. Примеры однородных уравнений:  $a \sin x + b \cos x = 0$ , где  $a \neq 0, b \neq 0$  - однородное тригонометрическое уравнение первой степени

Итак, дано уравнение  $a \sin x + b \cos x = 0$ , где  $a \neq 0, b \neq 0$ . Разделив обе части уравнения почленно на  $\cos x$ , получим

$$\frac{a \sin x}{\cos x} + \frac{b \cos x}{\cos x} = \frac{0}{\cos x}$$
$$a \cdot \operatorname{tg} x + b = 0, \operatorname{tg} x = -\frac{b}{a}.$$

Но, внимание! Делить обе части уравнения на одно и то же выражение можно только в том случае, когда мы уверены, что это выражение нигде не обращается в нуль (на 0 делить нельзя). Уверены ли мы, что в рассматриваемом случае  $\cos x$  отличен от 0? Давайте проанализируем. Предположим, что  $\cos x = 0$ . Тогда однородное уравнение  $a \sin x + b \cos x = 0$  примет вид  $a \sin x = 0$ , то есть  $\sin x = 0$ , так как  $a \neq 0$ . Получается, что и  $\cos x = 0$ , и  $\sin x = 0$ , а это невозможно, так как  $\sin x$  и  $\cos x$  обращается в нуль в различных точках. Итак, в однородном тригонометрическом уравнении первой степени деление обеих частей уравнения на  $\cos x$  – вполне благополучная операция.

Пример 1.  $5 \sin x - 2 \cos x = 0$

Поделим обе части уравнения  $\cos x$  (или на  $\sin x$ ). Предварительно докажем, что  $\cos x \neq 0$  (или  $\sin x \neq 0$ ). (Пусть  $\cos x = 0$ , тогда  $5 \sin x - 2 \cdot 0 = 0$ , т.е.  $\sin x = 0$ ; но этого не может быть, так как  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ).

Значит, можно делить на  $\cos x$ :

$$\frac{5 \sin x}{\cos x} - \frac{2 \cos x}{\cos x} = \frac{0}{\cos x}.$$

Получим уравнение

$$5 \operatorname{tg} x - 2 = 0, \operatorname{tg} x = \frac{2}{5},$$

$$x = \operatorname{arctg} \frac{2}{5} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ:  $x = \operatorname{arctg} \frac{2}{5} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ .

Решить уравнение

$$2\sin x - 3\cos x = 0$$

### Однородные тригонометрические уравнения второй степени ([Приложение 8](#))

Определение: Уравнение вида

$$a\sin^2 x + b\sin x \cdot \cos x + c\cos^2 x = 0$$

называется однородным тригонометрическим уравнением второй степени относительно  $\sin x$  и  $\cos x$ .

Если  $a \neq 0$ , то разделим обе части уравнения на  $\cos^2 x \neq 0$ ,

$$\frac{a\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{b\sin x \cdot \cos x}{\cos^2 x} + \frac{c \cdot \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{0}{\cos^2 x}$$

$$a \cdot \operatorname{tg}^2 x + b \cdot \operatorname{tg} x + c = 0$$

Это квадратное уравнение относительно новой переменной  $t = \operatorname{tg} x$ .

ПРИМЕР 1.  $\sin^2 x - 3\sin x \cdot \cos x + 2\cos^2 x = 0$ .

Решение: Разделим обе части уравнения почленно на  $\cos^2 x$ , получим:

$$\operatorname{tg}^2 x - 3\operatorname{tg} x + 2 = 0$$

$$t = \operatorname{tg} x$$

$$t^2 - 3t + 2 = 0$$

$$t_1 = 1, t_2 = 2$$

Значит, либо  $\operatorname{tg} x = 1$ ,

$$\operatorname{tg} x = 1$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \operatorname{arctg} 2 + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Ответ:  $x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}; x = \operatorname{arctg} 2 + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

Решить уравнение

$$1) \sin^2 x + 2\sin x \cdot \cos x - 3\cos^2 x = 0.$$

#### V. Первичная проверка понимания.

№1. Какие из уравнений в столбиках 1 – 3 лишние и почему?

Таблица 4

|                                                                                                                                             |                                                                                                                                                              |                                                                                                                      |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $3\sin^2 x - 5\sin x - 2 = 0$<br>$4\sin^2 x - 5\sin x - 2 = 0$<br>$3\sin^2 x + \sin x \cos x = 2\cos^2 x$<br>$4\sin^2 x + 11\sin x - 3 = 0$ | $2\cos^2 x - 3\sin x \cos x + \sin^2 x = 0$<br>$2\sin^2 x - \sin x \cos x = \cos^2 x$<br>$9\sin x \cos x - 7\cos^2 x = 2\sin^2 x$<br>$\sin 2x + \cos 2x = 0$ | $2\cos^2 x + \cos x = 0$<br>$\sin x - 2\sin x \cos x = 0$<br>$2\cos^2 x + \cos x + 3 = 0$<br>$\sin^2 x - \sin x = 0$ |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

№ 2. В течение двух минут распределите уравнения по известным вам методам (алгоритмам) решения, результат занесите в таблицу (в таблицу занести букву, под которой стоит уравнение):

**Таблица 5 ([Приложение 9](#))**

| Простейшее<br>тригон-ское | Замена<br>переменной | Разложение на<br>множители | Однородное I<br>степени | Однородное II<br>степени |
|---------------------------|----------------------|----------------------------|-------------------------|--------------------------|
|                           |                      |                            |                         |                          |
|                           |                      |                            |                         |                          |
|                           |                      |                            |                         |                          |

- 1)  $2\sin x \cos 5x - \cos 5x = 0$ ;
- 2)  $\sin(\pi + x) = 0$
- 3)  $2\sin x - 3\cos x = 0$
- 4)  $2\cos^2 x + 9\cos x + 14 = 0$ ;
- 5)  $3\sin^2 x - 4\sin x \cos x + \cos^2 x = 0$
- 6)  $2\cos(\pi/3 + 3x) - \sqrt{3} = 0$
- 7)  $3\cos^2 x - \sin x - 1 = 0$
- 8)  $\sin^2 x - \sin x = 0$ ,
- 9)  $\sin x - \cos x = 0$

## **VI. Первичное закрепление.**

Задача: выяснить, усвоен ли учащимися способ решения уравнений нового вида.

На доске записаны уравнения.

Найти среди уравнений уравнение, сводимое к квадратному, указать способ решения.

Найти среди уравнений однородные, определить их вид и указать способ решения.

1.  $\sin x = 2\cos x$  – однородное
2.  $\sqrt{3}\sin 3x - \cos 3x = 0$  – однородное
3.  $\sin^2 x - 2\sin x - 3 = 0$  – квадратное
4.  $2\cos^2 x + 3\sin^2 x + 2\cos x = 0$  – квадратное
5.  $6\sin^2 x - \cos^2 x - 5\sin x \cos x = 0$  – однородное

Учащиеся должны назвать вид уравнения и объяснить, как его можно решить. Учитель предлагает учащимся выбрать и решить по одному уравнению.

$$1. x = \arctg 2 + \pi n, n \in Z$$

$$2. x = \frac{\pi}{18} + \frac{\pi n}{3}, n \in Z$$

$$3. x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$$

$$4. x = \pi + 2\pi n, n \in Z$$

$$5. x = \arctg \frac{1}{6} + \pi n, n \in Z \quad x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$$

## VII. Домашнее задание.

«Сувенирная лавка». Без подарков домой не возвращаются, забегаем в сувенирную лавку забираем уравнения домой.

**Таблица 6 ([Приложение 10](#))**

### Домашнее задание. («3»)

| Вариант 1                                                                                                                                               | Вариант 2                                                                                                                                                                                                                |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $3 \sin^2 x + 5 \sin x \cos x + 2 \cos^2 x = 0$<br>$\operatorname{tg} x (\sin x - 1) = 0$<br>$2 \sin x - \cos x = 0$<br>$2 \sin^2 x - 5 \sin x + 2 = 0$ | $5 \sin x + 6 \cos x = 0$<br>$4 \operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^2 x = 0$<br>$4 \sin^2 x + 5 \sin x \cos x + \cos^2 x = 0$<br>$\left( \sin x - \frac{1}{3} \right) \cdot \left( \cos x + \frac{2}{5} \right) = 0$ |

### Домашнее задание. («4»)

| Вариант 3                                                                                                                              | Вариант 4                                                                                                                                |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $3 \cos^2 x - \sin x - 1 = 0$<br>$2 \cos x + \cos^2 x = 0$<br>$\sin^2 x - 5 \sin x \cos x + 4 \cos^2 x = 0$<br>$\sin 2x + \cos 2x = 0$ | $2 \sin x - 3 \cos x = 0$<br>$\sin^2 x - 5 \sin x \cdot \cos x + 6 \cos^2 x = 0$<br>$2 \sin^2 x = 1 + \cos x$<br>$3 \cos x = 4 \cos^2 x$ |

### Домашнее задание. («5»)

| Вариант 5                                                                                                                 | Вариант 6                                                                                                                       |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $4 \sin^2 x - 2 \sin x \cos x = 3$<br>$\cos^2 x + \cos x = 0$<br>$8 \sin^2 x + \cos x + 1 = 0$<br>$\sin x - 2 \cos x = 0$ | $3 \sin^2 2x - 2 = \sin 2x \cos 2x$<br>$2 \sin^2 x = 1 + \cos x$<br>$\sin x + \sqrt{3} \cos x = 0$<br>$2 \cos^2 x + \cos x = 0$ |

## VIII. Рефлексия.

Лист учёта знаний ([Приложение 11](#))

Таблица 7

| №<br>п/п | Виды деятельности<br>на уроке                                                                                                    | Максимальное<br>количество<br>баллов | ИТОГО |
|----------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------|-------|
| 1        | <b>Устно:</b> 1) Вычисления значений обратных тригонометрических величин                                                         | 5                                    |       |
|          | 2) частные случаи тригонометрических уравнений                                                                                   | 7                                    |       |
| 2        | <b>Работа в группе:</b><br>- участвовал в обсуждении проблемы<br>- доказывал свою точку зрения<br>- выполнял практическую работу | 3                                    |       |
| 3        | <b>Распределение уравнений по методам решения</b>                                                                                | 5 (1 балл за каждую группу)          |       |
| 4        | <b>Решение уравнений</b>                                                                                                         | 2                                    |       |
| 5        | <b>Активность на уроке</b>                                                                                                       | 3                                    |       |
|          | <b>Всего баллов:</b>                                                                                                             | <b>25</b>                            |       |
|          | «3» - 10-15 баллов,<br>«4» - 16-20 баллов,<br>«5» - 21-25 баллов                                                                 | Оценка                               |       |

Дорогие ребята! Спасибо вам за работу на уроке. Урок окончен. До свидания!