

Однородные тригонометрические уравнения второй степени

Определение: Уравнение вида

$$a \sin^2 x + b \sin x \cdot \cos x + c \cos^2 x = 0$$

называется однородным тригонометрическим уравнением второй степени относительно $\sin x$ и $\cos x$.

Если $a \neq 0$, то разделим обе части уравнения на $\cos^2 x \neq 0$,

$$\frac{a \sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{b \sin x \cdot \cos x}{\cos^2 x} + \frac{c \cdot \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{0}{\cos^2 x}$$

$$a \cdot \operatorname{tg}^2 x + b \cdot \operatorname{tg} x + c = 0$$

Это квадратное уравнение относительно новой переменной $t = \operatorname{tg} x$.

ПРИМЕР 1. $\sin^2 x - 3 \sin x \cdot \cos x + 2 \cos^2 x = 0$.

Решение: Разделим обе части уравнения почленно на $\cos^2 x$, получим:

$$\operatorname{tg}^2 x - 3 \operatorname{tg} x + 2 = 0$$

$$t = \operatorname{tg} x$$

$$t^2 - 3t + 2 = 0$$

$$t_1 = 1, t_2 = 2$$

$$\operatorname{tg} x = 1,$$

$$x = \operatorname{arctg} 1 + \pi n,$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi n$$

$$\operatorname{tg} x = 2$$

$$x = \operatorname{arctg} 2 + \pi n.$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$; $x = \operatorname{arctg} 2 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

Решить уравнение

1) $\sin^2 x + 2 \sin x \cdot \cos x - 3 \cos^2 x = 0$.