

Исследовательская работа по математике

«Использование необходимых и достаточных условий при решении задач»

Выполнила: ученица 11 "а" класса

Медцкер Ксения

Руководитель:

учитель математики

высшей квалификационной

категории

Лобанова Л.В.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение

1. Актуальность.....	2
2. Цель.....	2
3. Задачи.....	2

I. Теоретическая часть

1.1 Использование понятия предикат.....	3
1.2 Определение понятия.....	3

II. Практическая часть

2.1 Рассмотрение нескольких примеров.....	4
2.2 Решение задач.....	5-8
Сборник задач	9-12
Заключение.....	13
Список литературы.....	14

Введение

Актуальность

Тему «Использование необходимых и достаточных условий при решении задач» я выбрала, потому что задачи на необходимые и достаточные условия часто вызывают у абитуриентов трудности и приводят к ошибкам. Выявление необходимых (Н) и достаточных (Д) условий существенно упрощает решение определенного класса задач. Знание необходимых условий сужает набор и в некотором смысле как бы обеспечивает «заход с тыла». Некоторые примеры на необходимость и достаточность я разобрала.

Цель моей работы- это изучить необходимые и достаточные условия и с помощью этого метода научиться решать задания.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие **задачи:**

1. Изучить понятие необходимые и достаточные условия.
2. Рассмотреть примеры.
3. Указать применения и использование этого метода.

I. Теоретическая часть

1.1 Использование понятия предикат

ПРЕДИКАТ (от лат. praedicatum — сказуемое), в узком смысле — то же, что свойство; в широком смысле — отношение, т. е. свойство нескольких предметов. В логике — пропозициональная функция, т. е. выражение с неопределенными терминами (переменными), при выборе конкретных значений для этих терминов преобразующееся в осмысленное (истинное или ложное) высказывание.

1.2 Определение понятия

Если на множестве X заданы два предиката $A(x)$ и $B(x)$ и известно, что предикат $B(x)$ логически следует из предиката $A(x)$, то предикат $B(x)$ называют **необходимым условием** для предиката $A(x)$, а предикат $A(x)$ — **достаточным условием** для предиката $B(x)$. Следует обратить внимание на то, что часто слово «необходимое условие» заменяют словами «только тогда», «только в том случае».

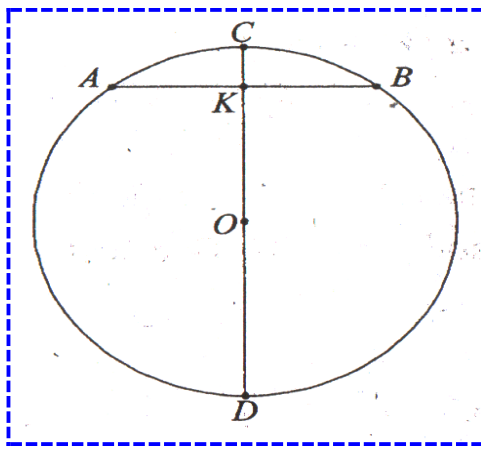
II. Практическая часть

2.1 Рассмотрение нескольких примеров

Пример 1.

Если хорда АВ, отличная от диаметра, перпендикулярна диаметру CD (утверждение А), то

- 1) она делится диаметром пополам, $AK=KB$ (утверждение В);
- 2) дуги, стягиваемые хордой, делятся диаметром пополам (утверждение С).



Утверждение В и С необходимы для утверждения А. Но в данном случае даже только В и С является достаточным для истинности А.

Эти примеры показывают, что вариации с необходимыми и достаточными условиями весьма разнообразны.

Рассмотрим несколько конкретных задач, взятых из вступительных экзаменов вузов и ЕГЭ.

Пример 2.

Если оба корня квадратного уравнения положительны (утверждение А), то их произведение положительно (утверждение В). Истинность этого предложения не вызывает сомнения. Здесь утверждение В является необходимым условием для утверждения А, но не достаточным, по той простой причине, корни одновременно могут быть отрицательными. Утверждение В и в этом случае истинно, а утверждение А ложно, что и доказывает, что условие В не достаточно (а только необходимо) для истинности А.

Замечание. Если А истинно, то истинно и В и истинно С, где утверждение С: сумма корней положительна. Но даже одновременная истинность В и С только необходима, но не достаточна для истинности А. Действительно корни могут быть комплексно сопряженными вида $a \pm bi$, где $a > 0$, $b \neq 0$. Тогда $x_1 + x_2 = 2a$, $x_1 \cdot x_2 = a^2 + b^2 > 0$, но утверждение А ложно.

2.1 Решение задач.

Задача 1.

При каких значениях параметра k оба корня уравнения $x^2 + 2(k-1)x + 5+k=0$ положительны?

Решение. Если корни положительны, то их произведение $x_1 \cdot x_2 = 5+k > 0$, т.е. $k > -5$. Но мы знаем, что условие $k > -5$ только необходимое для положительности корней. По теореме Виета.

Далее, если корни положительны, то их сумма $x_1 + x_2 = -2(k-1) > 0$, т.е. $k < 1$. Одновременное выполнение условий $k > -5$ и $k < 1$ — это тоже только необходимое условие, т.к. при этих условиях возможно корни будут комплексными (недействительными). Чтобы корни были действительными, достаточно еще дополнительно требовать неотрицательность дискриминанта:

$$\frac{1}{4} D = (k-1)^2 - (5+k) \geq 0$$

Отсюда получаем, что достаточные условия определяются системой:

$$\begin{cases} (k-1)^2 - 5 - k \geq 0 \\ k < -5, k < 1 \end{cases} \iff \begin{cases} k \leq -1 \\ k \geq 4 \end{cases} \iff \begin{cases} -5 < k \leq -1 \\ -5 < k < 1 \end{cases}$$

Ответ: $(-5; -1]$

Задача 2.

При каких значениях параметра a уравнение

$$ax^2 + 3x + 2a^2 - 3 = 0$$

имеет только целые корни?

Решение. Только разбиение на Н и Д условия дает ключ к решению задачи.

Если $a=0$, то $x=1$ — единственное решение. Пусть теперь $a \neq 0$. Тогда

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -3/a - \text{целое число,} \\ x_1 \cdot x_2 = 2a-3/a - \text{целое число.} \end{cases}$$

Если $3/a$ — целое число, то $2a$ — тоже целое число. Отсюда следует $2a=m$, $m \in \mathbb{Z}$, т.е. $a=m/2$ и $3/a=6/m$ — целое число. Следовательно, $m=\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$, а число a ,

$$a = \pm \frac{1}{2}; \pm 1; \pm \frac{3}{2}; \pm 3. \quad (1)$$

Соотношение (1) указывает только на необходимые условия. Проверим эти условия на достаточность. Первое требование — дискриминант $D = 9 - 4a(2a^2 - 3) \geq 0$ и более того, $\sqrt{D}$ — целое число.

Далее выражение

$$x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{D}/2a$$

должно быть целым числом. Этим требованиям удовлетворяют:

$$a = -1/2 \text{ и } a = 3/2.$$

Ответ: $\{0; -1/2; 3/2\}$.

Задача 3.

При каких целых значениях x функция

$$f(x) = x^2 + x - 16/x - 1$$

принимает наименьшее целое значение.

Решение. Данную функцию представим в виде:

$$f(x) = x + 2 - 14/x - 1 = x - 1 - 14/x - 1 + 3.$$

Функция $f(x)$ принимает целые значения тогда и только тогда, когда выражения $x-1$ и $14/x-1$ являются целыми числами, т.е. целое число $x-1$ - делитель 14. Отсюда следует: $x-1 = \pm 1; \pm 2; \pm 7; \pm 14$.

Составим следующую таблицу:

$x-1$	-14	-7	-2	-1	1	2	7	14
x	-13	-6	-1	0	2	3	8	15
$f(x)$	-10	-2	8	16	-10	-2	8	16

Из этой таблицы следует, что $f_{\min} = -10$ при $x = -13$ или $x = 2$.

Ответ: $\{-13; 2\}$.

Задача 4.

Найдите наибольшее целое значение параметра a , при котором наибольшее целое отрицательное решение неравенства

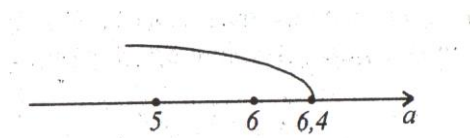
$$ax - 8/x \leq 8 \quad (1)$$

равно -5.

Решение. Найдём необходимые условия на параметр a , используя условие $x = -5$ - решение данного неравенства:

$$(a(-5) - 8)/(-5) \leq 8; \quad (5a + 8)/5 \leq 8, \quad a \leq 6,4.$$

Отсюда следует, что параметр a может принимать целые значения: 6; 5; 4;



Из этих значений $a=6$ является наибольшим. Проверим это значение на достаточность, т.е. при $a=6$ данное неравенство будет ли иметь $x = -5$ наибольшим целым отрицательным решением(1).

Итак, пусть $a=6$

$$\begin{cases} (6x-8)/x \leq 8 \\ x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x-8 \geq 8x \\ x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -4. \end{cases}$$

Иначе говоря, при $a=6$ наибольшее отрицательное целое решение неравенства (1) равно $x=-4$. Следовательно, условие $a=6$ недостаточно для того, чтобы неравенство (1) имело наибольшее неотрицательное целое решение $x=-5$. Пусть теперь $a=5$. Тогда

$$\begin{cases} \frac{5x-8}{x} \leq 8, \\ x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -\frac{8}{3} \\ x < 0. \end{cases}$$

Отсюда следует, $x=-3$ - наибольшее отрицательное решение (1). Проверку на достаточность число $a=5$ не выдержало. Докажем, что таких значений a нет. Действительно, т.к. $a \leq 6$, то:

$$\begin{cases} \frac{ax-8}{x} \leq 8, \\ x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax-8 \geq 8x, \\ x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{-8}{8-a}, \\ x < 0. \end{cases}$$

Убедимся, $x=-4$ - решение (1) при любых значениях $a \leq 6$:

$$-4 \leq -8/(8-a) \Leftrightarrow 1 \geq (2/8-a) \Leftrightarrow 8-a \geq 2 \Leftrightarrow a \leq 6.$$

Ответ: $\emptyset$.

Задача 5.

Найти все такие значения параметра k , при которых корни уравнения

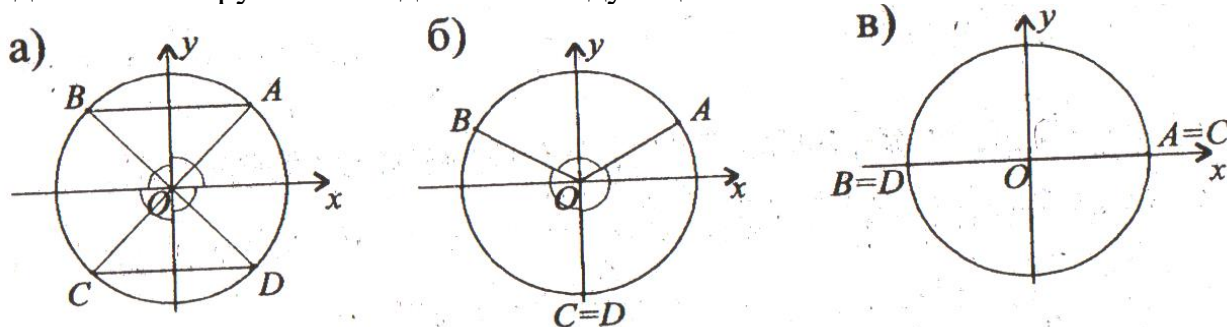
$$\sin^2 x + k \sin x - k = 0,$$

расположенные в порядке возрастания, образуют арифметическую прогрессию.

Решение. Найдём корни данного уравнения:

$$\sin(x)_{1,2} = (-k \pm \sqrt{k^2 + 4k})/2. \quad (1)$$

Заметим, что $\sin x \neq 1$. Если $(\sin x)_1 = a$, $|a| \leq 1$, $(\sin x)_2 = b$, $|b| \leq 1$, то корни, чтобы образовали арифметическую прогрессию, должны быть расположены на единичной окружности одним из следующих способов:



Четвёртый случай, когда $\sin x = 1$, из рассмотрения уже исключен.

Итак, чтобы корни (1) образовали арифметическую прогрессию, **необходимы** положения а), б), в). В первом случае угол поворота равен 90 град., во втором - 120 град., в третьем - 180 град.

Теперь проверим на **достаточность**, т.е. существуют ли такие значения параметра k , при котором имеют место а), б), в). Случай а) достигается, если

$$\begin{cases} (-k + \sqrt{k^2+4k})/2 = \sqrt{2}/2 \\ (-k - \sqrt{k^2+4k})/2 = -\sqrt{2}/2 \end{cases} \iff \begin{cases} \sqrt{k^2+4k} = \sqrt{2}+k \\ \sqrt{k^2+4k} = \sqrt{2}-k \end{cases} \iff \begin{cases} k=0 \\ \sqrt{k^2+4k} = \sqrt{2}+k \end{cases} \\ \emptyset$$

Иначе говоря, случай а) не достигим.

Случай б) достигается, если

$$\begin{cases} (-k + \sqrt{k^2+4k})/2 = \frac{1}{2} \\ (-k - \sqrt{k^2+4k})/2 = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} \sqrt{k^2+4k} = 1+k \\ \sqrt{k^2+4k} = 2-k \end{cases} \\ k = \frac{1}{2}$$

Случай в) достигается, если

$$\begin{cases} \frac{-k + \sqrt{k^2+4k}}{2} = 0 \\ \frac{-k - \sqrt{k^2+4k}}{2} = 0 \end{cases} \iff k = 0.$$

Ответ: $\{0; 1/2\}$.

Сборник задач

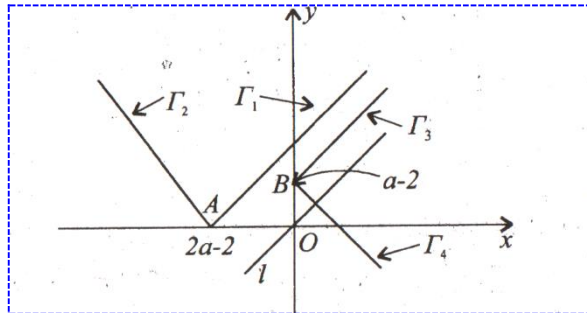
Задача 1

Найти все значения параметра a , при котором система

$$\begin{cases} |x-2a+2|=y, \\ |y-a+2|=x \end{cases}$$

имеет бесконечное множество решений.

Решение. Построим график $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ функции $y = |x-2a+2|$



Правая ветвь Γ_1 параллельна биссектрисе l первого и третьего координатных углов, а левая Γ_2 -перпендикулярна этой биссектрисе l . Сказанное справедливо и для функции

$y = |x-2a+2|$, ее графиком является кривая $\Gamma_3 \cup \Gamma_4$.

Система имеет бесконечное множество решений тогда и только тогда, когда пересечение одной из ветвей Γ_1 или Γ_2 с Γ_3 или Γ_4 дает луч или интервал.

Например, $\Gamma_1 \cap \Gamma_3$ -луч, если прямая $AB \parallel l$.

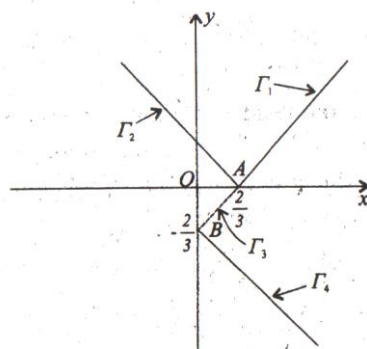
Вычислим координаты: $A(2a-2, 0)$, $B(0, a-2)$, $AB(2-2a, a-2)$.

Направляющий вектор луча Γ_1 имеет координаты $l(1, 1)$, а направляющий вектор луча Γ_2 - $(1, -1)$.

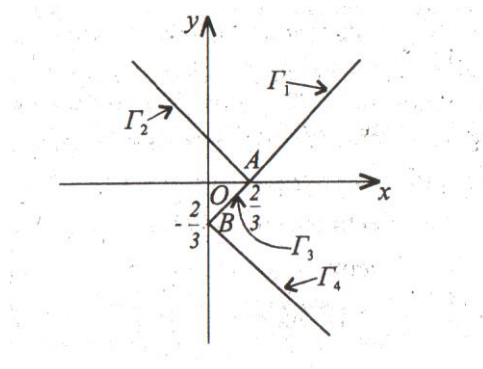
Тогда $2-2a/1 = a-2/1$ или $2-2a/1 = a-2/-1$.

Отсюда следует: $a=4/3$ или $a=0$. Найденные условия только **необходимы**, но возможно недостаточны для того, чтобы система имела бесчисленное множество решений.

Проверим на **достаточность**. При $a=0$ имеем



Графики не пересекаются, система не имеет решений. Пусть $a=4/3$



Пересечение $\Gamma_1 \cap \Gamma_3$ -луч. Система имеет бесчисленное множество решений.

Ответ: $4/3$

Задача 2.

Найдите наименьшее целое значение параметра a , при котором наименьшее целое отрицательное решение неравенства, равно -2 .

$$(ax^2+1)/x \leq 8 \quad (1)$$

Решение. Найдём необходимое условие на параметр a , используя то, что $x=-2$ - решение (1):

$$\frac{a(-2)^2+1}{-2} \leq 8 \Leftrightarrow a \geq -4\frac{1}{4}$$

Значение $a = -4$ проверим на достаточность:

$$\begin{cases} \frac{-4x^2+1}{x} \leq 8, \\ x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2+8x-1 \leq 0, \\ x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{2+\sqrt{5}}{-2} \leq x < 0.$$

Ясно, что имеют место неравенства

$$-3 < \frac{2+\sqrt{5}}{-2} \leq -2.$$

Отсюда следует: $x=-2$ - наименьшее целое отрицательное решение неравенства (1).

Ответ: -4 .

Задача 3.

Найти сумму всех целых значений переменной x , при которых является целым выражением

$$f(x) = \frac{x^2+x-1}{2x^2-6x-1}.$$

Решением. Те значения переменной x , для которых справедливы неравенства

$$0 < x^2+x-1 < 2x^2-6x-1,$$

заведомо не являются искомыми решениями, т.к. для таких x значения функции $y=f(x)$ заключаются $0 < f(x) < 1$. Найдём эти значения x как решение системы:

$$\begin{cases} x^2 + x - 1 > 0, \\ x^2 - 7x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \\ x > \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \\ x > 7. \end{cases}$$

Так как x -целое число, то во множестве $(-\infty; -2] \cup [8; +\infty)$ заведомо нет искомым значений x . Тогда необходимым условием для x целых, при которых $f(x)$ -целое, является принадлежность $x \in \{-1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$.

Проверим эти значения на достаточность:

x	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
$f(x)$	$-\frac{1}{7}$	1	$-\frac{1}{5}$	-1	-11	$\frac{19}{7}$	$\frac{29}{19}$	$\frac{41}{35}$	1

Из этой таблицы следует, что для x , равных 0; 2; 3; 7, значения функции $y=f(x)$ являются целыми. Найдём их сумму 12.

Ответ: 12.

Задача 4.

Найдём наименьшее целое значение параметра a , при котором сумма целых отрицательных решений неравенства

$$\frac{ax^2 + 1}{x} \leq 8 \quad (1)$$

равна -3.

Решение. Если $a \geq 0$, то (1) справедливо при всех $x < 0$, поэтому их сумма не может равна -3. Следовательно, искомые значения параметра a будем искать среди отрицательных значений a , будем искать среди отрицательных значений a : $a < 0$.

Так как $x < 0$, то

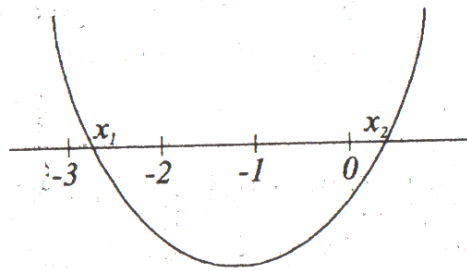
(1)

$$\Leftrightarrow -ax^2 + 8x - 1 \leq 0 \Leftrightarrow (-4 - \sqrt{16-a})/-a \leq x \leq (-4 + \sqrt{16-a})/-a$$

Выясним знаки корней:

$$x_2 = (-4 + \sqrt{16-a})/-a > 0, \quad x_1 = (-4 - \sqrt{16-a})/-a > 0$$

Сумма целых отрицательных решений равна -3, поэтому $-3 < x_1 < -2$



Отсюда следует, что $x=-2$ и $x=-1$ - решения (1).
Найдём необходимые условия на параметр a :

$$\begin{cases} \frac{a(-2)^2 + 1}{-2} \leq 8, \\ \frac{a(-1)^2 + 1}{-1} \leq 8, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq \frac{-17}{4}, \\ a \geq -9. \end{cases}$$

$$a \geq -4\frac{1}{4}$$

Значения $a = -4; -3; -2; \dots$ проверяем на достаточность. Пусть $a = -4$. Тогда неравенство (1) для $x < 0$ равносильно системе:

$$\begin{cases} \frac{-4x^2 + 1}{x} \leq 8, \\ x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 + 8x - 1 \leq 0, \\ x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{-2 - \sqrt{5}}{2} \leq x < 0$$

Убедимся, что

$$-3 < \frac{-2 - \sqrt{5}}{2} < -2.$$

эта система равносильна следующим:

$$6 > 2 + \sqrt{5} > 4 \Leftrightarrow 4 > \sqrt{5} > 2.$$

Следовательно, $a = -4$ - искомое значение.

Ответ: -4.

Заключение

Проведя работу по изучению «Использование необходимых и достаточных условий при решении задач» пришла к выводу в соответствии с целями и задачами. Цель моей работы было изучить необходимые и достаточные условия. Для достижения поставленной цели мною были поставлены следующие задачи:

1. Изучить понятие необходимые и достаточные условия.
2. Рассмотреть примеры.
3. Указать применения и использование этого метода.

Считаю, что проведённая мною работа позволила мне очень хорошо подготовиться к выпускному экзамену, решая задания второй части .

А также систематизировала полученные ранее знания по темам: «Арифметическая прогрессия», «Квадратные уравнения», «Уравнения с параметрами», «Системы и совокупности неравенств».

Список литературы

1. Вавилов С.И, Большая советская энциклопедия, 1916 г.
2. Жафяров А.Ж. профильное обучение математики старшеклассников. Учебно-методический комплекс. Новосибирск: Сиб. унив. изд-во, 2003.-468с.
3. Мудрик А.В. Социальная педагогика. М., 2000. С. 65-71.
4. Максимовой Т.И. Новейший полный справочник школьника: 5-11 классы. Естественные науки - м.: Эксмо, 2008.-576с.- (Новейшие справочники школьника).
5. Пышкало А.М. Теоретические основы начального курса математики, Учеб. пособие для учащихся школьных отделений пед. Училищ (специальность № 2001). М., «Просвещение», 1974.
6. Савин А.П. Энциклопедический словарь юного математика /сост. Э- 68.-М.: Педагогика, 1989-352с.:ил