

Методическая разработка

**«Доказательство неравенств во внеклассной работе со
школьниками»**

Автор: Морозова В.А.,
учитель математики
МБОУ «СОШ-ДС № 37 им. И.Г.Генова»

Симферополь, 2022

Содержание

Введение.....	3
1.Свойства и основные методы доказательства неравенств.....	6
2.Доказательство неравенств с помощью рассмотрения разности частей и алгебраических преобразований.....	8
3.Использование известных неравенств.....	10
3.1 Неравенство Евклида (8-9 класс).....	10
3.2 Неравенство Коши (9-10 класс).....	13
3.3 Неравенство Бернулли (9-10 класс).....	18
3.4 Неравенство Коши- Буняковского (10-11 класс).....	22
3.5 Неравенство Йенсена (11 класс).....	25
4.Метод математической индукции (8-9 класс).....	27
5.Метод «оценка+ пример» (8-11 класс).....	29
6.Самостоятельно составленные задачи.....	33
Заключение.....	36

ВВЕДЕНИЕ

Задачи на доказательство неравенств занимают очень важное место для математической подготовки учеников. Учащиеся знакомятся с понятием неравенство еще в младшей школе, изучая отношения "больше", "меньше", "равно" и учатся записывать результаты сравнения с помощью знаков, а также читать полученные неравенства. Далее школьники встречаются с понятием неравенство в 5-6 классах. Они встречаются с такими заданиями:

- Какая из точек лежит левее на координатном луче ...
- Запишите с помощью двойного неравенства.
- Я задумала число, оканчивающееся на 5. Оно больше 210 и меньше 220. Назовите его...

Ближе всего знакомятся с доказательством неравенств учащиеся в 8 классе. В рабочей программе по алгебре для 8 класса особое внимание уделяют на следующие темы: «Числовые неравенства и их свойства», «Линейные неравенства с одной переменной», «Системы неравенств с одним неизвестным». Все приобретенные учащимися навыки находят применение при изучении тем «Решение квадратичных неравенств». Обучающиеся должны знать, хотя бы три способа для решения квадратичных неравенств:

1. На основе разложения квадратного трехчлена на множители, построение эскиза графика квадратного трехчлена и написать ответ.
2. На основе разложения квадратного трехчлена на множители, использовать метод интервалов.
3. Графический метод решения неравенства: $ax^2 + bx + c > 0$; $ax^2 > -bx - c$.

После детального изучения школьной программы , в части на доказательства неравенств , учащиеся могут узнать намного больше интересных и познавательных задач на внеурочной деятельности.

Неравенства данной темы решаются алгебраическим способом, который является одним из лучших средств саморазвития , логического мышления. Благодаря специально подобранным задачам, которые способны заинтересовать учащихся своей кажущейся простотой и тем, что их решение не сразу дается в руки, можно показать учащимся красоту, простоту и изящество логического рассуждения. Задачи на доказательство неравенств обычно решаются несколькими способами. Это дает повод привлечь любопытство учащихся найти , как самый простой способ решения, но и на такие способы, которые часто используются при решении самых разных задач.

Доказательства неравенств разрешают воплощать в развитие изучения темы таких заданий: формирование навыков составления алгоритма выполнения; определение последовательности промежуточных целей с учетом конечного результата, помогают выполнять простейшие преобразования, излагать выводы; творчески излагать мысли.

В моей методической разработке рассмотрены следующие виды задач:

1. Доказательство неравенств с помощью рассмотрения разности его частей и алгебраических преобразований.
2. Задачи на доказательства с использованием уже доказанных неравенств (неравенство Коши, Коши-Буняковского, Йенсена и др.)
3. Метод математической индукции.
4. Метод «оценка + пример».

Например, доказывать неравенства с помощью математической индукции и Неравенством Евклида можно ученикам 8 класса на внеклассных занятиях. Неравенства Коши и Неравенства Бернулли рассматривать уже в 9 классе, когда учащиеся владеют достаточными знаниями по данной теме. С Неравенством Коши-Буняковского можно познакомить учащихся в 10

классе на внеклассной работе. А с Неравенством Йенсена в 11 классе, так как понятие производной в школьном курсе алгебры вводится только в 11 классе. Все вышеперечисленные виды неравенств играют большую роль в курсе алгебры.

Данная разработка рассчитана на учащихся, которые имеют довольно-таки высокий уровень знаний в области математики, причем как в пределах, так и вне школьной программы, но все равно хотят его повысить.

1. Свойства и основные методы доказательства неравенств.

Основные свойства неравенств:

1. К обеим частям неравенства можно прибавить или отнять любое выражение

$$f(x) > g(x) \longrightarrow f(x) + h(x) > g(x) + h(x)$$

2. Неравенства одного знака можно почленно складывать:

$$\begin{matrix} f(x) > g(x) \\ p(x) > h(x) \end{matrix} \longrightarrow f(x) + p(x) > g(x) + h(x)$$

3. Неравенства разных знаков можно почленно вычитать:

$$\begin{matrix} f(x) > g(x) \\ p(x) < h(x) \end{matrix} \longrightarrow f(x) - p(x) > g(x) - h(x)$$

4. Можно умножать и делить на одно и тоже положительное число обе части неравенства:

$$f(x) > g(x) \longrightarrow a \cdot f(x) > a \cdot g(x), a > 0$$

5. В случае, когда обе части неравенства разделить, либо умножить на одно и тоже отрицательное число, знак неравенства изменится на противоположный:

$$f(x) > g(x) \longrightarrow a \cdot f(x) < a \cdot g(x), a < 0$$

Основные методы доказательства неравенств:

Доказать неравенство - это значит обосновать его истинность при всех допустимых значениях переменных.

Существуют различные методы доказательства неравенств:

1. Рассмотрение разности левых и правых частей.
2. Рассмотрение частного и сравнение с единицей.
3. Метод от противного.
4. Использование уже доказанных неравенств.

2. Доказательство неравенств с помощью рассмотрения разности его частей и алгебраических преобразований.

Задача 1. (Окружной этап всероссийской олимпиады для 9 класса 1992-1993 учебный год)

Докажите, что верно неравенство $x^2 + xy + y^2 \geq 3(x + y - 1)$, для любых действительных чисел x и y .

Доказательство:

Разберем данное выражение как квадратный трехчлен относительно x :

$$x^2 + xy + y^2 - 3(x + y - 1) = x^2 + (y - 3)x + (y^2 - 3y + 3)$$

Посчитаем дискриминант и получим:

$$-3(y - 1)^2$$

Итак, дискриминант отрицателен.

Трехчлен допускает только положительные значения и показатель $x^2 > 0$, следовательно $x^2 + xy + y^2 \geq 3(x + y - 1)$ при любых x и y . Равенство верно, когда $x = y = 1$.

Задача 2. (Белорусская республиканская олимпиада, 9 класс 1962-1963 учебный год)

Докажите, что наибольшая площадь треугольника равна 1, стороны которого a, b, c заключены в пределах: $0 \leq x \leq 1 \leq y \leq 2 \leq z \leq 3$?

Доказательство:

Площадь треугольника находим по формуле: $S = \frac{1}{2} xy \cdot \sin \alpha$

Среди треугольников со сторонами x, y , удовлетворяющими условию задачи наибольшую площадь имеет прямоугольный треугольник с катетами $x = 1$ и $y = 2$. Третья сторона $z = \sqrt{5}$ удовлетворяет условию задачи, следовательно указанный треугольник имеет наибольшую площадь среди всех рассматриваемых. Следовательно площадь треугольника равна 1.

Задача 3.

$F(x)$ — квадратный трехчлен с показателями больше нуля.

Докажите, верно неравенство: $(F(xy))^2 \leq F(x)^2 F(y)^2$.

Доказательство:

Пусть $F(x) = ax^2 + bx + c$. Тогда $(F(xy))^2 - F(x)^2 F(y)^2 = (ax^2y^2 + bxy + c)^2 - (ax^4 + bx^2 + c)(ay^4 + by^2 + c) = a^2x^4y^4 + b^2x^2y^2 + c^2 + 2abx^3y^3 + 2acx^2y^2 + 2bcxy - a^2x^4y^4 - b^2x^2y^2 - b^2x^2y^2 - c^2 - abx^2y^2(x^2 + y^2) - ac(x^4 + y^4) - bc(x^2 + y^2) = abx^2y^2(2xy - x^2 - y^2) + ac(2x^2y^2 - x^4 - y^4) + bc(2xy - x^2 - y^2) = -abx^2y^2(x - y)^2 - ac(x^2 - y^2)^2 - bc(x - y)^2$

При $a \geq 0$, $b \geq 0$, $c \geq 0$ данные слагаемых отрицательны, следовательно неравенство $(F(xy))^2 \leq F(x)^2 F(y)^2$.

3. Использование известных неравенств.

Основные неравенства, на которые опираются при доказательстве других неравенств:

3.1 Неравенство Евклида (8-9 класс)

$$\frac{a_1+a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 a_2}, \text{ при } a_1 a_2 \geq 0$$

$$\frac{a_1+a_2}{2} - \sqrt{a_1 a_2} = \frac{a_1 a_2 - 2\sqrt{a_1 a_2}}{2} = \frac{(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2}{2} \geq 0$$

$$\text{Следовательно, } \frac{a_1+a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 a_2}$$

Равенство достигается, тогда и только тогда, когда числа a_1 и a_2 равны.

Рассмотрим задачи на неравенство Евклида:

Задача 1.

$$\text{Доказать, что } \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+b^2}} \leq \frac{2}{\sqrt{1+ab}} \text{ для } a, b > 0$$

Доказательство:

Возведем обе части в квадрат:

$$\frac{1}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+a^2}\sqrt{1+b^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+b^2}} \leq \frac{4}{\sqrt{1+ab}}$$

Далее, приведем к общему знаменателю и раскроем скобки, получим:

$$2(1 + a^2 + b^2 + a^2 b^2) - (1 + b^2 + ab + ab^3) - (1 + a^2 + ab + a^3 b) = (1 - ab)(a - b)^2 \geq 0$$

Из неравенства Евклида о средних для двух чисел имеем:

$$\frac{2}{\sqrt{1+a^2}\sqrt{1+b^2}} \leq \frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} \leq \frac{2}{1+ab}$$

$$\text{Сложив полученные неравенства, получаем что } \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+b^2}} \leq \frac{2}{\sqrt{1+ab}}$$

Задача 2.

Доказать, что для положительных чисел a , b и c :

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$$

Доказательство:

Согласно тому, что $\sqrt{a+b} \geq 2\sqrt{ab}$, получим $b+c \geq 2\sqrt{bc}$, $c+a \geq 2\sqrt{ca}$.

Если мы перемножим оба неравенства, то получим, что

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$$

Задача 3.

Доказать, что если $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$, то $\frac{2x}{y+z} + \frac{2y}{x+z} + \frac{2z}{y+x} \geq 3$

Доказательство:

Введем замену переменных:

$$a = y+z$$

$$b = x+z$$

$$c = y+x;$$

Выразим переменные:

$$2x = -a + b + c$$

$$2y = a - b + c$$

$$2z = a + b - c.$$

Получаем неравенство

$$\frac{-a+b+c}{a} + \frac{a-b+c}{b} + \frac{a+b-c}{c} \geq 3$$

$$\left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right) + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) \geq 6$$

Мы видим, что все три скобки больше или равны двум. Следовательно ,
левая часть неравенства больше или равна шести.

3.2 Неравенство Коши (9-10 класс)

К числу наиболее часто встречающихся в математике числовых неравенств относится неравенство: «среднее арифметическое двух или более неотрицательных чисел больше или равно их среднему геометрическому», которое носит название Неравенство Коши:

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$$

$$a_1, a_2, a_n \geq 0$$

Рассмотрим задачи на Неравенство Коши:

Задача 1.

Доказать неравенство: $(1+a)(1+b)(1+c) \geq 8(1-a)(1-b)(1-c)$, при этом $a+b+c=1$

Доказательство:

Так как, по условию $a+b+c=1$, значит $1+a=(1-b)+(1-c)$.

Далее, применим неравенство Коши между средним арифметическим и средним геометрическим $x + y \geq 2\sqrt{xy}$, получим:

$$1+a \geq 2\sqrt{(1-c) \cdot (1-b)}.$$

$$1+b \geq 2\sqrt{(1-a) \cdot (1-c)}.$$

$$1+c \geq 2\sqrt{(1-b) \cdot (1-a)}.$$

Теперь, если мы перемножим данные неравенства, то увидим, что $(1+a)(1+b)(1+c) \geq 8(1-a)(1-b)(1-c)$.

Задача 2.

Докажите, что для любого натурального $n \geq 2$ имеют место

$$\text{неравенства } n(\sqrt[n]{n+1}) < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} < n\left(1 - \frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right) + 1$$

Доказательство :

Применим неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим для чисел $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \dots, \frac{n+1}{n}$. В результате получим:

$$\frac{1}{n} \left(2 + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \dots + \frac{n+1}{n} \right) \geq \sqrt[n]{n+1}, \text{ т.е.}$$

$$(1+1) + \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(1 + \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(1 + \frac{1}{n}\right) \geq \sqrt[n]{n+1}$$

Применим неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим для чисел $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \dots, \frac{n+1}{n}$. В результате получим :

$$\frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \dots + \frac{n-1}{n} \right) \geq \sqrt[n]{\frac{1}{n}}, \text{ т.е.}$$

$$1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \geq \frac{n}{\sqrt[n]{n}}$$

Задача 3.

Доказать, что для любых четырех действительных чисел a, b, c, d выполняется неравенство:

$$a^4 + b^4 + c^4 + d^4 \geq 4abcd$$

Доказательство :

Применим неравенство Коши между средним арифметическим и средним геометрическим, получим:

$$\frac{a^4 + b^4 + c^4 + d^4}{4} \geq \sqrt[4]{a^4 b^4 c^4 d^4}$$

Следовательно, $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 \geq 4abcd$

Задача 4.

Для положительных чисел a, b, c доказать неравенство:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3$$

Доказательство :

Перепишем данное неравенство в виде: $\frac{\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}}{3} \geq 1$

Выражение в левой части – это среднее арифметическое трех чисел $x_1 = \frac{a}{b}$, $x_2 = \frac{b}{c}$, $x_3 = \frac{c}{a}$.

Среднее геометрическое этих чисел равно:

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a}}$$

Наше неравенство сводится к неравенству для среднего арифметического и среднего геометрического трех указанных чисел.

Следовательно, $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3$

Задача 5.

Докажите, что $a^4 + b^4 \geq 2$, если $a + b = 2$.

Доказательство:

Введем замену переменных a : $a = 1 - x$, тогда $b = 1 + x$.

Следовательно, $a^4 + b^4 = 2 + 12x^2 + 2x^4 \geq 2$.

А значит $a^4 + b^4 \geq 2$.

Задача 6. (Сборник ЕГЭ профильный уровень 2018 год)

Доказать неравенство:

$$\frac{x^2 - 2x + 1}{(x+2)^2} + \frac{x^2 + 2x + 1}{(x-3)^2} \leq \frac{(2x^2 - x + 5)^2}{2(x+2)^2(x-3)^2}$$

Доказательство:

В данном неравенстве мы видим формулы квадрата суммы и квадрата разности, введем замену переменных : $a = \frac{x-1}{x+2}$, $b = \frac{x+1}{x-3}$.

Тогда получим:

$$a+b = \frac{(x-1)(x-3)+(x+1)(x+2)}{(x+2)(x-3)} = \frac{2x^2 - x + 5}{(x+2)(x-3)}$$

Данное неравенство принимает вид:

$$a^2 + b^2 \leq \frac{(a+b)^2}{2}, \text{ откуда } a^2 + b^2 - 2ab \leq 0$$

Неравенство верно, при условии, если $a=b$.

Следовательно:

$$\frac{x-1}{x+2} = \frac{x+1}{x-3}$$

Выполним умножение крест-накрест и получим:

$$x^2 - 4x + 3 = x^2 + 3x + 2$$

$$x = \frac{1}{7}$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{1}{7}$$

Задача 7. (Сборник ЕГЭ профильный уровень 2018 год)

Доказать неравенство:

$$\frac{(x-1)^2 + 4(x+1)^2}{2} \leq \frac{(3x+1)^2}{4}$$

Доказательство:

Избавимся от знаменателя до множив обе части на 4, получим:

$$2(x-1)^2 + 8(x+1)^2 \leq (3x+1)^2$$

Далее раскроем скобки и формулы квадрата суммы и квадрата разности:

$$2x^2 - 4x + 2 + 8x^2 + 16x + 8 \leq 9x^2 + 6x + 1$$

Приведем подобные слагаемые:

$$x^2 + 6x + 9 \leq 0$$

Отсюда видно, что дискриминант равен 0, следовательно неравенство имеет один единственный корень:

$$x = -3$$

Ответ: -3.

3.3 Неравенство Бернулли (9-10 класс)

Неравенство, записанное в виде:

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx$$

называется неравенством Бернулли. Это неравенство выполняется при $x \geq -1$ и для всех целых $n \geq 1$. Доказательство неравенства основано на методе математической индукции.

Очевидно, что при $n=1$ неравенство Бернулли выполняется. Пусть неравенство выполняется при некотором целом $n > 1$. Проверим справедливость этого неравенства при $n+1$:

$$(1 + x)^{n+1} = (1+x) (1 + x)^n \geq (1 + x)(1+nx) = 1+x+nx+nx^2 \geq 1+(n+1)x$$

Неравенство Бернулли выполняется и при рациональных значениях n , которые больше чем 1. При положительных рациональных n , которые меньше чем 1, справедливо такое неравенство:

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx, \quad 1 > n > 0.$$

Рассмотрим задачи на неравенство Бернулли:

Задача 1.

Решить уравнение:

$$\sqrt[5]{1 + \sqrt{1 - x^2}} + \sqrt[5]{1 - \sqrt{1 - x^2}} = 2$$

Решение:

Используя неравенство Бернулли получаем:

$$(1 + \sqrt{1 - x^2})^{\frac{1}{5}} + (1 - \sqrt{1 - x^2})^{\frac{1}{5}} \leq 1 + \frac{1}{5} \sqrt{1 - x^2} + 1 - \frac{1}{5} \sqrt{1 - x^2} = 2$$

Решение неравенства достигается тогда и только тогда, когда $\sqrt{1 - x^2}$, то есть

$$x = 1, x = -1.$$

Ответ: 1,-1.

Задача 2.

Доказать : $(1 + \alpha)^n \geq 1 + n\alpha$, где $\alpha > -1$, n – натуральное число.

Доказательство:

Воспользуемся методом математической индукции.

При $n = 1$ получаем истинное неравенство:

$$1 + \alpha \geq 1 + \alpha.$$

Предположим, что имеет место неравенство:

$$(1 + \alpha)^n \geq 1 + n\alpha.$$

$$(1 + \alpha)^{n+1} \geq 1 + (n + 1)\alpha.$$

Мы видим, что $\alpha > -1$ и $\alpha + 1 > 0$.

Умножим левую и правую часть неравенства на $(\alpha + 1)$, получим:

$$(1 + \alpha)^n (1 + \alpha) \geq (1 + n\alpha)(1 + \alpha)$$

Так как $n\alpha^2 \geq 0$, то

$$(1 + \alpha)^{n+1} \geq 1 + (n + 1)\alpha + n\alpha \geq 1 + (n + 1)\alpha.$$

Следовательно, $(1 + \alpha)^n \geq 1 + n\alpha$.

Задача 3.

Дано: $a_1 + a_2 + \dots + a_n \leq \frac{1}{2}$, где $a_1, a_2, \dots, a_n$ - положительные числа.

Доказать, что $(1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_n) < 2$.

Доказательство (способ 1):

Итак, для начала раскроем скобки в левой части неравенства, получим:

$$1 + (a_1 + \dots + a_n) + (a_1a_2 + \dots + a_{n-1}a_n) + (a_1a_2a_3 + \dots + a_{n-2}a_{n-1}a_n) + \dots + a_1a_2 \dots + a_n.$$

Мы видим, что во второй скобке неравенства ,сумма чисел не превосходит:

$(a_1 + \dots + a_n)^2$, аналогично и в третьей скобке не превосходит

$$(a_1 + \dots + a_n)^3.$$

Отсюда следует, что $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} = 2 - \frac{1}{2^n} < 2$.

Способ 2.

Методом математической индукции докажем, что для всех натуральных n верно неравенство:

$$(1 + a_1) \dots (1 + a_n) < 1 + 2(a_1 + \dots + a_n).$$

При $n = 1$ имеем: $1 + a_1 < 1 + 2a_1$.

Пусть при $n = k$ имеет место: $(1 + a_1) \dots (1 + a_k) < 1 + 2(a_1 + \dots + a_k)$.

Рассмотрим случай $n = k + 1$: $(1 + a_1) \dots (1 + a_k)(1 + a_{k+1}) <$

$$< (1 + 2(a_1 + \dots + a_k)) \cdot (1 + a_{k+1}) \leq 1 + 2 \cdot (a_1 + \dots + a_k) + a_{k+1} \cdot (1 + 2 \cdot \frac{1}{2}) =$$

$$= 1 + 2 \cdot (a_1 + \dots + a_k + a_{k+1}).$$

В силу принципа математической индукции неравенство доказано.

Задача 4.

Доказать, что если $a + b = 1$, то имеет место неравенство $a^8 + b^8 \geq \frac{1}{128}$

Доказательство:

Из условия, что $a + b = 1$, следует, что $a^2 - 2ab + b^2 = 1$. Сложив неравенство с очевидным неравенством: $a^2 + 2ab + b^2 \geq 0$.

$$\text{Получим: } 2a^2 + 2b^2 \geq 1$$

Возведя обе части этого неравенства в квадрат, получим: $4a^4 - 8a^2b^2 + 4b^4 \geq$

1 , Сложив неравенство с очевидным неравенством: $4a^4 - 8a^2b^2 + 4b^4 \geq 0$

получим $8a^4 + 8b^4 \geq 1$, откуда

$$64a^8 + 128a^4b^4 + 64b^4 \geq 1.$$

Сложив эти неравенства с очевидным неравенством $64a^8 - 128a^4b^4 + 64b^4 \geq 0$, получим $128a^8 + 128b^8 \geq 1$, или $a^8 + b^8 \geq \frac{1}{128}$

Задача 5. (Окружной этап всероссийской олимпиады для 9 класса 1994-1995 учебный год)

Докажите, неравенство:

$$\frac{a}{a^4+b^2} + \frac{b}{a^4+b^2} \leq \frac{1}{ab}$$

Доказательство:

Из неравенства видно, что

$$a^4 + b^2 \geq 2a^2b \text{ и } b^4 + a^2 \geq 2b^2a.$$

$$\text{Следовательно } \frac{a}{a^4+b^2} + \frac{b}{b^4+a^2} \leq \frac{a}{2a^2b} + \frac{b}{2b^2a} = \frac{1}{ab}$$

Задача 6. (Окружной этап всероссийской олимпиады для 9 класса 1994-1995 учебный год)

$$\text{Доказать: } \sqrt{xy+1} + \sqrt{yz+1} + \sqrt{zx+1} > x + y + z.$$

Доказательство:

По условию $|x-y| < 2$, следовательно $x^2 - 2xy + y^2 < 4$, следовательно $x^2 + 2xy + y^2 < 4(1+xy)$, следовательно $x+y < 2\sqrt{xy+1}$, так как x и y положительны. Аналогично, $y+z < 2\sqrt{yz+1}$, $z+x < 2\sqrt{zx+1}$, следовательно $x + y + z < \sqrt{xy+1} + \sqrt{yz+1} + \sqrt{zx+1}$.

Задача 7. (Окружной этап всероссийской олимпиады для 11 класса 1993-1994гг.)

Докажите, что при всех x , $0 < x < \frac{\pi}{3}$, справедливо неравенство $\sin 2x + \cos x > 1$.

Доказательство:

Используем следующие тригонометрические тождества:

$$1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}, \quad \sin 2x = 4 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \cos x,$$

Данное неравенство приведем к следующему виду: $2 \cos x > \operatorname{tg} \frac{x}{2}$.

Отсюда следует, что $2 \cos x > 2 \cos \frac{\pi}{3} = 1$, а значит $\operatorname{tg} \frac{x}{2} < \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} < 1$.

Таким образом $\sin 2x + \cos x > 1$.

3.4 Неравенство Коши- Буняковского (10-11 класс)

Теорема. Для любых наборов чисел: a_1, a_2, a_n

$$b_1, b_2, b_n$$

Верно неравенство:

$$\begin{aligned} |a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_n b_n| &\leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_n^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_n^2} \\ (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_n b_n)^2 &\leq (a_1^2 + a_2^2 + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_n^2) \end{aligned} \quad (1)$$

Рассмотрим функцию:

$$f(t) = (a_1 t - b_1)^2 + (a_2 t - b_2)^2 + (a_n t - b_n)^2$$

t – переменная, остальные-параметры.

$$f(t) = (a_1^2 + a_2^2 + a_n^2) t^2 - 2t(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_n b_n) + (b_1^2 + b_2^2 + b_n^2) = At^2 - 2Ct + B.$$

$A = 0$ тогда и только тогда, когда $a_1 = a_2 = a_n = 0$ и неравенство (1) очевидно.

$A \neq 0$ тогда и только тогда, когда $A > 0$ и f – квадратичная функция с графиком возрастающим вверх.

Так как $f(t) \geq 0$, то уравнение $f(t) = 0$ имеет не более одного корня и дискриминант меньше или равен нулю.

$$D = 4C^2 - 4AB = 4(C^2 - AB) \leq 0, \text{ то есть } C^2 \leq AB.$$

Замечание. Во многих задачах, важным является несколько само неравенство Коши-Буняковского, сколько условие равенства в этом неравенстве.

Равенство в неравенстве (1) может достигаться тогда и только тогда, когда существует $t_0 : f(t_0) = 0$.

$$(a_1 t_0 - b_1)^2 + (a_2 t_0 - b_2)^2 + \dots + (a_n t_0 - b_n)^2 = 0.$$

$$t_0 = \frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \frac{b_n}{a_n}$$

Так же можно сказать, что равенство будет соблюдаться, если хотя бы один из двух числовых наборов является вырожденным:

$$a_1 = a_2 = a_n = 0$$

$$b_1 = b_2 = b_n = 0$$

Задача 1.

Дано: $x+y+z = 1$.

Доказать, что $x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{1}{3}$

Доказательство:

Согласно неравенству Коши-Буняковского:

$$1 = 1 \cdot x + 1 \cdot y + 1 \cdot z \leq \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} \cdot \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{3} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Следовательно $x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{1}{3}$.

Задача 2.

Доказать, что $\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \dots + \sqrt{10} < 24$

Доказательство:

На основе применения неравенства можно записать, что

$$(\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \dots + \sqrt{10})^2 \leq (1^2 + 1^2 + 1^2 + \dots + 1^2) (1 + 2 + 3 + \dots + 10)$$

Так как $1 + 2 + 3 + \dots + 10 = 55$, то $(\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \dots + \sqrt{10})^2 \leq 550$

Или $(\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \dots + \sqrt{10})^2 \leq 24^2$.

Задача 3.

Известно, что $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Найти: $\min (3x + 4y + 5z)$

$\max (3x + 4y + 5z)$

Решение:

$$\begin{aligned} |(3x + 4y + 5z)| &\leq \sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \\ -5\sqrt{2} &\leq 3x + 4y + 5z \leq 5\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Чтобы сделать вывод, что $-5\sqrt{2}$ и $5\sqrt{2}$ искомые значения, необходимо найти x, y, z для которых они достигаются. Это можно сделать с помощью условий неравенства Коши-Буняковского:

$$\begin{cases} \frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{5} \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{4}{3}x \\ z = \frac{5}{3}x \\ x^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 x^2 + \left(\frac{5}{3}\right)^2 x^2 = 1 \end{cases}$$

$$x^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 + \left(\frac{5}{3}\right)^2}$$

$$\text{Отсюда, } x = \pm \frac{3^2}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2}}$$

Если выбирать знак «+», то будет достигаться max значение, если знак «-», то min значение.

Ответ: min - $5\sqrt{2}$, max $5\sqrt{2}$.

3.5 Неравенство Йенсена (11 класс)

Рассмотрим еще такой общий подход к доказательству неравенств с использованием свойств выпуклости (вогнутости) функций. Хорошо известно, что для всякой выпуклой (вогнутой) функции $f : [a;b] \xrightarrow{\quad} \mathbb{R}$ будет верно неравенство Йенсена:

$$f(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_n f(x_n) \quad (1)$$

$$f(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n) \geq \lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_n f(x_n)$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n \in [a;b];$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 1$$

$$\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$$

Выпуклость (вогнутость) функций удобно проверять с помощью второй производной f , если f достаточно гладкая:

$$f''(x) > 0$$

$$f''(x) < 0, x \in [a;b];$$

Проверить выпуклость (вогнутость) f , можно на базе (1).

Задача.

Доказать неравенство:

$$\sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \leq \frac{1}{8}$$

Доказательство:

$$\text{Пусть } f(x) = \ln \sin \frac{x}{2}.$$

Для проверки вогнутости f , найдем $f''(x)$:

$$f''(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{\cos \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \right)' = \frac{1}{2} \frac{-\sin^2 \frac{x}{2} - \cos^2 \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2} < 0$$

α, β, γ - углы треугольника.

$$\text{Т.е } \alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

$$f\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\right) \geq \frac{1}{3} (f(\alpha)+f(\beta)+f(\gamma))$$

$$\ln \sin 60^\circ \geq \frac{1}{3} \ln \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}$$

$$3\ln \frac{1}{2} \geq \ln..$$

$$\ln \frac{1}{8} \geq \ln \sin$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \leq \frac{1}{8}$$

$$\ln_{\frac{1}{8}} = 3\ln_{\frac{1}{8}} \geq \ln\left(\sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}\right)$$

$$\text{Следовательно, } \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \leq \frac{1}{8}.$$

4.Метод математической индукции (8-9 класс)

Индукция – это рассуждение от частного к общему. Метод математической индукции удобно применять ,если требуется доказать какую-то последовательность утверждений $\{Y_k\}_{n=1}^{\infty}$. И оказывается , что доказательство этой последовательности равносильно доказательству всего двух таких утверждений:

1) базис: Y_1 .

2) для любого k из Y_k следует Y_{k+1}

В некоторых задачах шаг 2) заменяют на следующий: если верно Y_l , при $1 \leq k$, то верно Y_{k+1} .

шаг 1) называют базисом индукции.

шаг 2) индуктивным переходом.

С методом математической индукции учащихся знакомят в 9-10 классе.

Докажем несколько неравенств методом математической индукции:

Задача 1.

Найдите все $n \in \mathbb{N} : 2^n > n^2$, $n = 1, 2, 3, \dots$

Докажем, при $n \geq 5$, $2^n > n^2$;

1. Базис $2^5 = 32 > 5^2 = 25$

2. Пусть при $n=k$: $2^k > k^2$

3. Докажем, при $n = k+1$: $2^{k+1} > (k+1)^2$

$$2^{k+1} = 2 \cdot 2^k > 2k^2 > (k+1)^2$$

$$2k^2 - (k+1)^2 = 2k^2 - k^2 - 2k - 1 = k^2 - 2k - 1 = k^2 - 2k + 1 - 2 = (k-1)^2 - 2.$$

Так как $k \geq 5$, то $(k+1)^2 \geq 16 > 2$.

Следовательно, $2k^2 > (k+1)^2$.

Ответ: при $n=1$, а так же $n \geq 5$.

Задача 2.

Доказать, что для любого $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$: $ab \geq 0$.

$$a^n + b^n \geq \frac{(a+b)^n}{2^{n-1}}$$

Доказательство :

1. Базис : $n=2$:

$$2(a^2 + b^2) \geq (a + b)^2 - \text{верно.}$$

2. Пусть $n=k$:

$$2^{k-1} (a^k + b^k) \geq (a + b)^k$$

3. Докажем, что $n=k+1$:

$$2^k (a^{k+1} + b^{k+1}) \geq (a + b)^{k+1}$$

$$\begin{aligned} (a + b)^{k+1} &= (a+b)(a + b)^k \leq 2^{k-1} \cdot (a+b) \cdot (a^k + b^k) = 2^{k-1} \cdot (a^{k+1} + ab^k + ba^k \\ &+ b^{k+1} \cdot a^{k+1} + b^{k+1} - (ab^k + ba^k) = a^{k+1} - a^k b + b^{k+1} - ab^k = a^k(a-b) + b^k(b-a) \\ &= (a-b)(a^k - b^k). \end{aligned}$$

При $a > b$, следует, что $a^k > b^k$, значит $(a-b)(a^k - b^k) > 0$.

При $a < b$, следует, что $a^k < b^k$, значит $(a-b)(a^k - b^k) > 0$.

$$ab^k + ba^k \leq a^{k+1} + b^{k+1}.$$

5.Метод« оценка плюс пример» (8-11 класс)

« Оценка плюс пример» — это математическое рассуждение, которое используется в задачах для определения наибольших и наименьших значений . Смысл метода «оценка плюс пример» заключается в том , что требуется не только установить неравенство , но еще и показать его неулучшаемость и привести пример , когда достигается равенство.

Данный метод осуществляется следующим образом:

1. Оценка. Убеждаемся , что данное неравенство выполняется: $B \geq \alpha$
2. Пример. Показываем пример, при котором достигается равенство $B = \alpha$

Задача 1.

Дано 100 аэродромов. Со всех аэродромов взлетает самолет и летит на ближайший к нему аэродром. Все расстояние различны. Докажите, что ни на один аэродром не может прилететь шесть самолетов.

Доказательство:

Предположим, что самолеты из точек M и N прилетели в точку P , тогда расстояние MN - наибольшая сторона треугольника MPN и $\angle MPN > 60^\circ$. Так же представим, что в точку P прилетели самолеты из точек $M_1, \dots, M_n$. Отсюда видно, что один из углов $M_i P M_j$ не превосходит $\frac{360^\circ}{n}$. Следовательно $\frac{360^\circ}{n} > 60^\circ$, получаем противоречие.

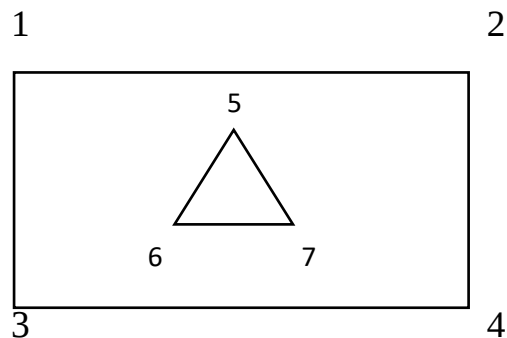
Задача 2.

В конкурсе «Лучший кондитер» участвовало 7 человек. Каждый кондитер приготовил по два торта. В конце конкурса объявили, что призов не будет и все кондитеры держав в руках по два торта бросили их в ближайших соседей. Какое наибольшее число кондитеров могло остаться с «незапятнанной репутацией»?

Доказательство:

Выберем двух кондитеров между которыми минимальное расстояние. Они бросили по два торта в соседей. Так как расстояние минимально, то кондитеры попали друг в друга по одному тарту. Поскольку каждый бросил еще по одному тарту, то эти тарты попали в какого-то еще из кондитеров. Итак, не менее трех кондитеров запятнаны.

Однако возможна ситуация, когда все тарты попали в трех кондитеров. Такое могло произойти, если четыре кондитера будут стоять в виде прямоугольника, а остальные трое кондитеров будут находиться внутри данного прямоугольника изображая между собой треугольник. Пример данного рассуждения:



Глядя на рисунок можно сказать, что четверо кондитеров, которые находятся снаружи изображая прямоугольник останутся с «незапятнанной репутацией».

Задача 3.

$$\sin^5 x + \cos^9 x = 1$$

Доказать, что $\sin^5 x \leq \sin^2 x$

$$\cos^9 x \leq \cos^2 x$$

Доказательство:

$$1 = \sin^5 x + \cos^9 x \leq \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin^5 x = \sin^2 x \\ \cos^9 x = \cos^2 x \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} \cos x = 0 & \quad \text{или} \quad \cos x = 1 \quad x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z} & \quad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \left\{ \begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \cos x = 1 \end{array} \right. & \quad \text{или} \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \sin x = 1 \end{array} \right. \\ \text{Следовательно, } \sin^5 x \leq \sin^2 x & \\ \cos^9 x \leq \cos^2 x & \end{aligned}$$

Задача 4. (Сборник ЕГЭ 2018 профильный уровень)

Имеется более 40, но менее 48 целых чисел. Среднее арифметическое этих чисел -3 , среднее арифметическое всех положительных из них равно 4 , а среднее арифметическое всех отрицательных из них равно -8 .

- Сколько чисел имеется?
- Каких чисел написано больше: положительных или отрицательных?
- Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди них?

Решение:

Начнем решение данной задачи с ввода переменных: пусть положительных чисел x , отрицательных y , а нулевых z . Далее найдем сумму набора чисел: итак, сумма всех чисел равна их количеству записанных, умноженному на среднее арифметическое. Определим сумму:

$$4x - 8y + 0 \cdot z = -3(x + y + z)$$

Рассмотрим пункт а):

Мы видим, что слева в равенстве записанном сверху каждое из слагаемых делится на 4 , следовательно сумма чисел $x+y+z$ будет делиться на 4 . По условию задачи общее число записанных чисел удовлетворяет неравенству:

$$40 < x + y + z < 48$$

Тогда $x + y + z = 44$, т.к. единственное натуральное число между 40 и 48, которое делится на 4- это 44.

Ответ на пункт а) : 44 числа написано на доске.

Рассмотрим пункт б):

Для того, чтобы определить каких чисел написано больше: положительных или отрицательных приведем равенство:

$$4x - 8y = -3(x + y + z) \text{ Упростим его:}$$

$$5x = 7y + 3z.$$

Рассмотрим пункт в):

Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди них?

Мы видим, что $5x \geq 7y, x \geq y$. Следовательно положительных чисел записано меньше, чем отрицательных. Далее подставим число 44 вместо $x+y+z$ в равенство:

$$4x - 8y = -3(x + y + z).$$

$$4x - 8y = -3 \cdot 44$$

$$4x - 8y = -132$$

$$x = 2y - 33$$

Видно, что $x+y \leq 44$, значит получим:

$$3y - 33 \leq 44$$

$$3y \leq 77$$

$$y \leq 25$$

Значит $x = 2y - 33 \leq 17$. Следовательно наибольшее количество положительных чисел 17.

Ответ: а) 44; б) отрицательных; в) 17.

6. Самостоятельно составленные задачи

Задача 1.

Решить уравнение:

$$2^{x-2} + 2^{2-x} = \sqrt{x-1} + \sqrt{3-x}$$

$$2^x \cdot \frac{1}{4} + 2^{-x} \cdot 4 \geq \sqrt{x-1} + \sqrt{3-x}$$

Ведём замену:

$$x - 2 = t$$

$$2 - x = -t$$

Получим:

$$2^t + 2^{-t} = \sqrt{x-1} + \sqrt{3-x}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2^t + 2^{-t} = 2 \\ \sqrt{x-1} + \sqrt{3-x} = 2 \end{array} \right.$$

$$x - 1 + 3 - x + 2\sqrt{(x-1)(3-x)} = 4$$

$$2\sqrt{(x-1)(3-x)} = 2$$

$$\sqrt{(x-1)(3-x)} = 1$$

$$(x-1)(3-x) = 1$$

$$3x - x^2 - 3 + x - 1 = 0$$

$$-x^2 + 4x - 4 = 0$$

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$(x-2)^2 = 0$$

$x = 2$, следовательно $t=0$.

Ответ: $x = 2$.

Задача 2.

$$1 + \cos^2 \pi x = \sqrt{x-3} + \sqrt{5-x}$$

$$1 \leq 1 + \cos^2 \pi x \leq 2$$

$$\sqrt{5-x} + \sqrt{x-3} \leq \sqrt{2} \cdot \sqrt{34} = 2\sqrt{17}$$

$$3 \leq x \leq 6$$

При $x = 4$ (Из условия равенства в неравенстве Коши-Буняковского для корней)

Получаем:

$$1 + \cos^2 4\pi = 2$$

$$\sqrt{4-3} + \sqrt{5-4} = 2.$$

Ответ: 2.

Задача 3.

Доказать неравенство:

$$10x^2 + 2y^2 + 5z^2 \geq 2xy + 4yz + 6xz$$

$$x^2 - 2xy + y^2 + y^2 - 4yz + 4z^2 + z^2 - 6xz + 9x^2 \geq 0$$

Свернем данное неравенство в квадрат разности, получим:

$$(x - y)^2 + (y - 2z)^2 + (z - 3x)^2 \geq 0$$

Следовательно , $10x^2 + 2y^2 + 5z^2 \geq 2xy + 4yz + 6xz$.

Задача 4.

Решить уравнение:

$$\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} = |x-2| + |x-4|$$

Решение:

$$\text{ОДЗ } x \in [2;4]$$

Докажем, что левая часть меньше или равна 2:

$$\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} \leq 2$$

Из неравенства Коши-Буняковского, получаем:

$$1 \cdot \sqrt{x-2} + 1 \cdot \sqrt{4-x} \leq \frac{1+x-2}{2} + \frac{1+4-x}{2} = 2 \quad (*)$$

Докажем, что правая часть больше или равна 2:

$$|x-2| + |x-4| = |2-x| + |x-4| \geq |2-x+x-4| = 2$$

Так как, $|a+b| \leq |a| + |b|$ для любых a и b .

Итак, левая часть не больше 2, а правая – не меньше 2. Поэтому $\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} = |x-2| + |x-4| = 2$. Это означает, что в (*) достигается равенство , что возможно только при $x-2 = 4-x = 1$ или $x = 3$.

Проверка показывает, что $x = 3$ подходит.

Ответ: $x = 3$.

Заключение

В результате проделанной работы был подобран материал по теме «Доказательство неравенств во внеклассной работе со школьниками», а именно: теоретические сведения по неравенствам Йенсена, Коши, Коши-Буняковского и Бернулли, задачи, в решениях которых используются эти неравенства.

На основании выбранной учебной и методической литературы были выделены основные моменты, связанные с проведением школьных математических олимпиад. Подробно раскрыты цели и структура олимпиад по математике в школе. Сделан вывод, что математические олимпиады являются достаточно популярной формой организацией внеурочной работы в школе. Раскрыто содержание теоретических вопросов, связанных с понятиями и методами решений неравенств, также рассмотрены основные классические неравенства, которые используются при решении задач математических олимпиад. Все это было собрано и оформлено в виде электронного учебника. Учебник позволяет самостоятельно изучать эту тему, получая знания на достаточном уровне, а также помогает строить логические цепи рассуждения; делать выводы о выборе решения, анализировать и оценивать полученные результаты.

Список литературы

1. Выгодский М.Я. Справочник по элементарной математике. – М.: Наука, 1972. – 416 с.
2. Ижболдин О., Курляндчик Л. Неравенство Йенсена. – Научно-популярный физико-математический журнал «Квант», №4, 1990. – 95с.
3. Конюшков А. Неравенство Коши-Буняковского. – Научно-популярный физико-математический журнал «Квант», №8, 1987. – 110с.
4. Супрун В.П. Избранные задачи повышенной сложности по математике. – Мн.: Полымя, 1998. – 108 с. – («В помощь абитуриентам и студентам»)
5. Соловьев Ю.П. Неравенства (Серия: «Библиотека «Математическое просвещение»»)) М.: МЦНМО, 2005. — 16 с.:
6. ЕГЭ 2018, Математика, Большой сборник тематических заданий, Профильный уровень, Ященко И.В